Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

2. Übungsblatt

Präsenzübungen

Aufgabe P6

Zeigen Sie, dass in einem metrischen Vektorraum die Vektoraddition stetig ist, und dass $\lambda x_n \to \lambda x$ aus $x_n \to x$ für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{N}$ folgt.

Hinweis: Die Skalarmultiplikation $\mathbb{K} \times X \to X$ ist in einem metrischen Vektorraum i.A. nicht stetig. Ein Gegenbeispiel hierzu ist in [Mad88, Example 13, p. 89].

Aufgabe P7

Sei X ein normierter Raum und U ein endlich-dimensionaler Unterraum von X. Zeigen Sie, dass U abgeschlossen ist.

Aufgabe P8 (Beweis des Satzes I.2.7: a) und b))

Seien X, Y, Z normierte Räume und $T \in L(X, Y)$ und $S \in L(Y, Z)$. Zeigen Sie, dass

(1) $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$;

(2) $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$;

(3) der Raum $L(X, Y)$ normiert ist.

Aufgabe P9

Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum aller reellwertigen Polynome auf $\mathbb{R}$.

Für ein Polynom $P(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$ definieren wir die Norm $\|P\| = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}$ kein Banachraum ist.

(2) Geben Sie ein Beispiel für einen nicht-stetigen linearen Operator $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ an.

(3) Untersuchen Sie, ob die folgende lineare Abbildung $T\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ stetig ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls $\|T\|$:

$$(TP)(t) = \int_0^t P(x)dx \,.$$

Hausübungen

Aufgabe H4

Sei X ein normierter Raum, und seien $S, T\colon X \to X$ lineare Abbildungen mit $ST - TS = \mathrm{Id}$.

(1) Zeigen Sie, dass $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)T^n$ für alle n gilt.

(2) Zeigen Sie, dass S oder T unstetig ist.

Bermerkung: Ist X der Raum der C^∞-Funktionen auf einem Intervall (mit irgendeiner Norm) und $(Sf)(t) = f'(t)$, $(Tf)(t) = tf(t)$, so ist die Voraussetzung erfüllt; für diese Wahl von S und T ist $ST-TS = \mathrm{Id}$ eine Umformulierung der Heisenbergschen Unschärferelation. Die typischen Operatoren der Quantenmechanik sind daher unbeschränkt.

Aufgabe H5

Sei A eine Menge in einem normierten Raum X. Für $x \in X$ definieren wir den Abstand von x zu A durch $d(x, A) := \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}$.

(1) Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto d(x, A)$ stetig ist.

(2) Sei nun X ein endlich-dimensionaler normierter Raum und U ein echter Unterraum von X. Zeigen Sie, dass es ein $x \in X$ gibt mit $\|x\| = 1$ und $d(x, U) = 1$.

Aufgabe H6

Sei X ein beliebiger unendlich-dimensionaler normierter Raum. Konstruieren Sie eine unbeschränkte und lineare Abbildung $X \to \mathbb{R}$.

Bemerkung: Es ist nicht leicht, eine solche Abbildung ohne die implizite Benutzung des Auswahlaxioms anzugeben. Insbesondere werden wir sehen, dass "vernünftige" linear Abbildunge auf einem Banachraum automatisch beschränkt sind. Versuchen Sie z.B. auf $X = C([0,1], \mathbb{R})$ eine bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ unbeschränkte und lineare Abbildung $X \to \mathbb{R}$ möglichst explizit anzugeben.

References

[Mad88] Maddox, I. J. *Elements of functional analysis* (Cambridge University Press, Cambridge, 1988), second edn.