13 Auswahlaxiom und Zornsches Lemma

Handout zur 'Funktionalanalysis I' von H. Glöckner, 25.11.2008

Wichtige Teile der modernen Mathematik beruhen auf dem sogenannten *Auswahlaxiom* der Mengenlehre. Dieses Axiom und eine seiner wichtigsten Konsequenzen, das *Zornsche Lemma* werden hier erläutert. In der Funktionalanalysis werden wir das Zornsche Lemma häufig benutzen. Eine erste Anwendung ist die (bisher in Satz 12.4 ohne Beweis behauptete) Existenz von vollständigen Orthonormalsystemen in (nicht notwendig separablen) Hilberträumen.

13.1 Das Auswahlaxiom. *Ist $I \neq \emptyset$ und $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie nicht-leerer Mengen, so ist auch das kartesische Produkt*

$$\prod_{i\in I} X_i \;:=\; \Big\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i : (\forall i \in I) \;\; f(i) \in X_i \Big\}$$

eine nicht-leere Menge.

13.2 Intuitiv ist dies plausibel: Wir wählen für jedes $i \in I$ ein Element $x_i \in X_i$ und bauen dann all diese zu einer Familie $f := (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ zusammen.

13.3 Genauer betrachtet können wir als Sterbliche allerdings nur endlich viele Elemente auswählen, die Argumentation aus **13.2** ist daher nicht zwingend. Wenn man die Argumentation dennoch akzeptieren und benutzen möchte, kommt man nicht umhin, sie als ein Axiom festzuschreiben (als das Auswahlaxiom).

13.4 Unter der Hand haben Sie das Auswahlaxiom schon häufig benutzt – man braucht es etwa in der Analysis I, um zu zeigen, dass Folgen-Stetigkeit einer Funktion deren ε-δ Stetigkeit impliziert.

Zur Erinnerung: Der Beweis ist per Kontraposition. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 nicht ε-δ-stetig, so gibt es ein ε derart, dass für jedes $\delta > 0$ ein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $|x - x_0| < \delta$ aber $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Insbesondere gibt es also für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{R}$ mit $|x_n - x_0| < 2^{-n}$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Wollen wir die so ausgewählten x_n's zu einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zusammenbauen, so stoßen wir genau auf das in **13.3** dargestellte Problem. Akzeptieren wir das Auswahlaxiom, können wir unsere Argumentation retten: Nach dem Vorigen ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $X_n := \{x \in \mathbb{R} \colon |x - x_0| < 2^{-n} \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\}$ nicht leer, es existiert daher ein Element $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Dies ist eine Folge aus Elementen der gewünschten Art. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ für alle n, weswegen die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergiert. Also ist f nicht Folgen-stetig in x_0.

13.5 Neben solchen stillschweigenden (und nicht jedem bewussten!) Anwendungen des Auswahlaxioms zu unspektakulären Zwecken wird das Auswahlaxiom in Logik, Algebra, Topologie, Maßtheorie, Funktionalanalysis und anderen Bereichen der Mathematik auch

ganz bewusst und mit großem Erfolg eingesetzt. Diese Anwendungen beruhen meist auf dem Zornschen Lemma oder dem Wohlordnungssatz (welcher u.a. “transfinite Induktion” ermöglicht). Sowohl das Zornsche Lemma (das wir sogleich formulieren und beweisen werden) als auch der Wohlordnungssatz (den wir hier nicht thematisieren wollen) sind Folgerungen des Auswahlaxioms, implizieren aber umgekehrt auch das Auswahlaxiom, wenn man sie als gültig voraussetzt.

Zur Erinnerung: Eine *geordnete Menge* ist ein Paar $(M, \leq)$, bestehend aus einer Menge M und einer (partiellen) Ordnung $\leq$ auf M (also einer reflexiven, antisymmetrischen, transitiven Relation). Wie üblich schreiben wir $x < y$ falls $x \leq y$ und $x \neq y$.

Definition 13.6 Es sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge.

(a) Gegeben eine Teilmenge $X \subseteq M$ nennen wir ein Element $s \in M$ eine *obere Schranke für* X, wenn $x \leq s$ für alle $x \in X$. Ist $s \in M$ eine obere Schranke für X derart, dass $s \leq t$ für jede obere Schranke t von X, so nennen wir s die *kleinste obere Schranke von* X und schreiben $\sup(X) := s$. Die kleinste obere Schranke ist eindeutig festgelegt, falls sie existiert.

(b) Gegeben eine geordnete Menge $(M, \leq)$ nennen wir eine Teilmenge $K \subseteq M$ eine *Kette* in M, wenn K unter der Ordnung $\leq$ total geordnet ist, also für alle $x, y \in K$ gilt: $x \leq y$ oder $y \leq x$.

(c) $(M, \leq)$ heißt *induktiv geordnet*, wenn jede Kette in M eine obere Schranke besitzt. Besitzt jede Kette sogar eine kleinste obere Schranke, so heißt $(M, \leq)$ *vollständig induktiv.*

(d) Ein Element $x \in M$ heißt *maximal*, wenn für jedes $y \in M$ mit $x \leq y$ folgt $y = x$.

13.7 Beachte, dass ein maximales Element x nicht mit jedem Element von M vergleichbar zu sein braucht. Beispiel: $M := \{\{1\}, \{2\}, \emptyset\}$ mit Inklusion von Mengen als Ordnung. Hier sind sowohl $\{1\}$ als auch $\{2\}$ maximale Elemente. Es gilt weder $\{1\} \leq \{2\}$ noch $\{2\} \leq \{1\}$.

13.8 Jede induktiv geordnete Menge ist nicht leer. Es ist nämlich $K := \emptyset$ eine Kette in $(M, \leq)$. Zu dieser existiert eine obere Schranke $s \in M$. Also existiert ein Element in M.

Im folgenden setzen wir das Auswahlaxiom als gültig voraus und leiten nun daraus das Zornsche Lemma ab. Will man betonen, dass ein Resultat vom Auswahlaxiom abhängt, so schreibt man meist “(AC)” hinzu (für “Axiom of Choice”).

Satz 13.9 (Zornsches Lemma) (AC) *Jede induktiv geordnete Menge besitzt ein maximales Element.*

Beweis. Wir reduzieren zunächst auf den Fall *vollständig* induktiv geordneter Mengen.

Lemma 13.10 *Gilt das Zornsche Lemma für vollständig induktiv geordnete Mengen, so gilt es auch allgemein.*

Beweis von Lemma 13.10. Gegeben eine induktiv geordnete Menge $(M, \leq)$ sei $\mathcal{C} := \{K \subseteq M : K \text{ ist Kette}\}$ die Menge aller Ketten in M. Wir ordnen $\mathcal{C}$ durch Inklusion: $K_1 \leq K_2 :\Leftrightarrow K_1 \subseteq K_2$ für Ketten $K_1, K_2 \subseteq M$. Dann ist $(\mathcal{C}, \leq)$ vollständig induktiv. Um dies einzusehen, sei $\mathcal{K}$ eine Kette in $\mathcal{C}$. Die Elemente $K \in \mathcal{K}$ sind Ketten in M, und wir vereinigen nun all diese und erhalten so eine neue Teilmenge $S := \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ $(= \bigcup \mathcal{K})$ von M. Sind $x_1, x_2 \in S$, so gibt es $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ mit $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$. Da $\mathcal{K}$ als Kette in $\mathcal{C}$ total geordnet ist, gilt $K_1 \subseteq K_2$ oder $K_2 \subseteq K_1$. Im ersten dieser Fälle gilt $x_1, x_2 \in K_2$ uns somit $x_1 \leq x_2$ oder $x_2 \leq x_1$, da K_2 als Kette total geordnet ist. Im zweiten Fall gilt $x_1, x_2 \in K_1$ und wir kommen zur selben Schlussfolgerung. Somit ist S total geordnet, somit $S \in \mathcal{C}$ eine Kette in M. Per Definition von S gilt $K \subseteq S$ für alle $K \in \mathcal{K}$, somit $K \leq S$. Es ist daher S eine obere Schranke für $\mathcal{K}$ in $\mathcal{C}$. Ist auch $T \in \mathcal{C}$ eine obere Schranke für $\mathcal{K}$, so gilt $K \leq T$, also $K \subseteq T$ für alle $K \in \mathcal{K}$. Daher $S = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K \subseteq T$, d.h. es ist $S \subseteq T$ und somit $S = \sup(\mathcal{K})$ die kleinste obere Schranke für $\mathcal{K}$ in $\mathcal{C}$. Also ist $(\mathcal{C}, \leq)$ tatsächlich vollständig induktiv.

Da $\mathcal{C}$ vollständig induktiv ist, ist per Voraussetzung die Aussage des Zornschen Lemmas für $\mathcal{C}$ gültig: $\mathcal{C}$ besitzt ein ein maximales Element K. Da $(M, \leq)$ induktiv ist, besitzt K eine obere Schranke s in M. Dann ist s ein maximales Element in M (und somit die Behauptung bewiesen!), denn wäre s nicht maximal, so gäbe es ein Element $x \in M$ mit $x > s$. Für jedes $y \in K$ wäre dann $x > s \geq y$, also $x > y$. Daher wäre auch $K^* := K \cup \{x\}$ eine Kette in M. Diese wäre eine echte Obermenge von K, da $x \neq y$ für alle $y \in K$ (weil $x > y$). Also wäre K in $\mathcal{C}$ nicht maximal, Widerspruch! $\square$

Der folgende Beweis des Zornschen Lemmas für vollständig induktiv geordnete Mengen basiert auf einem Fixpunktsatz, dessen Beweis wir anschließend nachtragen:

Satz 13.11 (Tarskischer Fixpunktsatz) *Es sei $(M, \leq)$ eine vollständig induktiv geordnete Menge und $f : M \to M$ eine Selbstabbildung von M derart, dass $x \leq f(x)$ für alle $x \in M$. Dann existiert ein $x_0 \in M$ mit $f(x_0) = x_0$.*

Beweis des Zornschen Lemmas für vollständig induktiv geordnete Mengen. Es sei $(M, \leq)$ vollständig induktiv geordnet. Hätte M kein maximales Element, so wäre für jedes $x \in M$ die Menge $M_x := \{y \in M : x < y\}$ nicht leer. Nach dem Auswahlaxiom ist daher auch das kartesische Produkt $\prod_{x \in M} M_x$ nicht leer, wir finden also ein Element $(y_x)_{x \in M}$ von $\prod_{x \in M} M_x$. Dann ist $f : M \to M$, $f(x) = y_x$ eine Selbstabbildung von M mit $f(x) = y_x > x$ für alle $x \in M$. Nach dem Tarskischen Fixpunktsatz besitzt f einen Fixpunkt x_0. Jedoch ist, wie gerade beobachtet, $f(x_0) > x_0$. Widerspruch.

Beweis des Tarskischen Fixpunktsatzes. Es sei $(M, \leq)$ eine vollständig induktiv geordnete Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung mit $x \leq f(x)$ für alle $x \in M$. Für die Zwecke des Beweises nennen wir eine Teilmenge $A \subseteq M$ *abgeschlossen*, falls $f(A) \subseteq A$ und für jede Kette $K \subseteq A$ das in M gebildete Supremum von K in A enthalten ist, $\sup(K) \in A$. Dieses ist dann auch die kleinste obere Schranke von K in A bzgl. der von M auf A induzierten Ordnung $\leq_A$ (für $x, y \in A$ gelte also $x \leq_A y$ genau dann, wenn $x \leq y$). Wir stellen nun einige Beobachtungen an.

13.12 $\emptyset$ ist eine Kette in M und besitzt daher eine kleinste obere Schranke $\sup(\emptyset)$. Ist $x \in M$ beliebig, so ist x eine obere Schranke für die Kette $\emptyset$ und daher $\sup(\emptyset) \leq x$. Da $\sup(\emptyset) \leq x$ für alle $x \in M$, ist $\sup(\emptyset) = \min(M)$ das kleinste Element von M (zur Erinnerung: ein "kleinstes Element" definiert man durch vorige Eigenschaft).

13.13 Jede abgeschlossene Menge enthält $\min(M) = \sup(\emptyset)$ (da $\emptyset$ eine Kette in A ist).

13.14 Der Durchschnitt

$$M_0 := \bigcap_{A \subseteq M \text{ abg.}} A \subseteq M$$

aller abgeschlossenen Teilmengen von M ist abgeschlossen in M. Begründung: Für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq M$ ist $f(M_0) \subseteq f(A) \subseteq A$, folglich $f(M_0) \subseteq \bigcap_A A = M_0$. Ist weiter $K \subseteq M_0$ eine Kette, so ist $\sup(K) \in A$ für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq M$ und somit $\sup(K) \in \bigcap_A A = M_0$.

13.15 Als abgeschlossene Teilmenge von M ist M_0 vollständig induktiv geordnet, und wegen $f(M_0) \subseteq M_0$ ist die Einschränkung $g := f|_{M_0}$ eine Selbstabbildung von M_0 mit $x \leq g(x)$ für alle x. Da jeder Fixpunkt von g auch einer von f ist, genügt es, die Existenz eines Fixpunktes für g zu zeigen. Indem wir M durch M_0 und f durch g ersetzen, dürfen wir nun also o.B.d.A. annehmen, dass M keine echte abgeschlossene Teilmenge $A \subset M$ besitzt.

Unser langfristiges Ziel ist es, zu zeigen, dass M (im jetzt vorliegenden Spezialfall) eine Kette ist. Wir nennen im folgenden ein Element $x \in M$ ein *Dach*, wenn $f(y) \leq x$ für alle $y \in M$ mit $y < x$.

13.16 Behauptung. *Ist $x \in M$ ein Dach und $y \in M$, so gilt $y \leq x$ oder $f(x) \leq y$* (ein Dach "zerlegt" die Menge).

Bemerkung 13.17 Beachte, dass im Falle $f(x) \leq y$ per Voraussetzung an f insbesondere $x \leq f(x) \leq y$. Ein Dach x ist daher mit jedem Element $y \in M$ vergleichbar. Können wir zeigen, dass jedes Element $x \in M$ ein Dach ist, so ist also M eine Kette und somit existiert $x_0 := \sup(M)$ (weil M vollständig induktiv ist). Da $f(x_0) \in M$ und x_0 eine obere Schranke für M ist, gilt dann $f(x_0) \leq x_0$. Andererseits ist $x_0 \leq f(x_0)$ per Voraussetzung an f. Somit ist $x_0 = f(x_0)$ ein Fixpunkt.

Zum Beweis der Behauptung **13.16** setzen wir $A := \{y \in M : y \leq x \text{ oder } f(x) \leq y\}$. Wenn wir zeigen können, dass A abgeschlossen ist, so folgt $A = M$ per Voraussetzung an M (siehe **13.15**). Sei also $K \subseteq A$ eine Kette mit Supremum $s := \sup(K)$ in M; wir zeigen $s \in A$. Fall 1: Existiert ein $y \in K$ mit $f(x) \leq y$, so ist $x \leq f(x) \leq y \leq \sup(K)$, also $\sup(K) \in A$. Fall 2: Existiert kein $y \in K$ mit $f(x) \leq y$, so gilt $y \leq x$ für alle $y \in K$ (weil ja $y \in K \subseteq A$ insbesondere ein Element von A ist, und daher $y \leq x$ oder $f(x) \leq y$, per Definition von A). Also ist x eine obere Schranke für K und somit $\sup(K) \leq x$. Daher $\sup(K) \in A$. Für die Abgeschlossenheit von A bleibt noch $f(A) \subseteq A$ zu zeigen. Sei hierzu

$y \in A$. Dann ist $y \le x$ oder $f(x) \le y$. 1. Ist $y < x$, so ist $f(y) \le x$ (da x ein Dach ist), also $f(y) \in A$. 2. Ist $y = x$, so ist $f(x) \le f(y)$, also $f(y) \in A$. 3. Ist $f(x) \le y$, so ist wegen $y \le f(y)$ auch $f(x) \le f(y)$, somit $f(y) \in A$. Also ist A tatsächlich abgeschlossen und somit die Behauptung bewiesen.

13.18 Behauptung. *Jedes Element $x \in M$ ist ein Dach.*

Zum Beweis der Behauptung setzen wir $D := \{x \in M : x \text{ ist ein Dach}\}$ und zeigen, dass D abgeschlossen ist (und daher $D = M$ wegen **13.15**). Sei hierzu $K \subseteq D$ eine Kette. Für das Supremum $\sup(K)$ in M haben wir $\sup(K) \in D$ zu zeigen. Ist $K = \emptyset$, so ist $\sup(K) = \min(M)$ und dies ist ein Dach (denn es gibt kein $y \in M$ mit $y < \min(M)$). Sei nun $K \neq \emptyset$ und $y \in M$ gegeben mit $y < \sup(K)$. Da wegen $K \subseteq D$ jedes $x \in K$ mit y vergleichbar ist (siehe Bem. 13.17) und y wegen $y < \sup(K)$ keine obere Schranke für K sein kann, muss ein $x \in K$ existieren mit $y < x$. Da x ein Dach ist, folgt $f(y) \le x \le \sup(K)$. Wir haben gezeigt, dass aus $y < \sup(K)$ folgt $f(y) \le \sup(K)$; somit ist $\sup(K) \in D$ ein Dach. Für die Abgeschlossenheit von D ist noch $f(D) \subseteq D$ nachzuweisen. Dazu sei $x \in D$; um zu sehen, dass $f(x)$ ein Dach ist, sei $y \in M$ mit $y < f(x)$. Da x ein Dach ist, gilt $y \le x$ oder $f(x) \le y$ (siehe **13.16**), wobei der zweite Fall aufgrund unserer Annahme $y < f(x)$ nicht auftreten kann. Ist $y < x$, so ist $f(y) \le x \le f(x)$ (da x ein Dach ist). Ist $y = x$, so ist $f(y) = f(x) \le f(x)$. Also ist $f(x)$ ein Dach. Dies beendet den Beweis des Tarskischen Fixpunktsatzes und somit auch den Beweis des Zornschen Lemmas. $\square$

Bemerkung 13.19 Gilt das Zornsche Lemma, ist der Tarskische Fixpunktsatz übrigens trivialerweise gültig: Dann besitzt M nämlich ein maximales Element x_0. Für dieses gilt $x_0 \le f(x_0)$ laut Voraussetzung an f. Es gilt somit entweder $x_0 = f(x_0)$ (dann sind wir fertig) oder $x_0 < f(x_0)$. Da x_0 maximal ist, kann Fall 2 nicht auftreten.

Bemerkung 13.20 Wie schon erwähnt, sind das Auswahlaxiom und das Zornsche Lemma äquivalent. Bisher haben wir nur gezeigt, dass das Auswahlaxiom das Zornsche Lemma impliziert. Die Rückrichtung (die für die Zwecke der Vorlesung keine Rolle spielt) ist weniger kompliziert: Gilt das Zornsche Lemma und ist $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie nicht-leerer Mengen X_i mit nicht-leerer Indexmenge I, so betrachten wir die Menge M aller Paare (J, f), wobei $J \subseteq I$ und $f \in \prod_{i\in J} X_i$. Definieren wir $(J_1, f_1) \le (J_2, f_2) :\Leftrightarrow (J_1 \subseteq J_2$ und $f_2|_{J_1} = f_1)$, so ist $\le$ eine partielle Ordnung auf M. Die Menge M ist induktiv geordnet: ist nämlich $K \subseteq M$ eine Kette, so setzen wir $J_0 := \bigcup_{(J,f)\in K} J$ und definieren $f\colon J_0 \to \bigcup_{j\in J_0} X_j$ via $f_0(j) := f(j)$ falls $j \in J$ mit $(J, f) \in K$. Da K eine Kette ist, ist f_0 wohldefiniert, $f_0 \in \prod_{j\in J_0} X_j$ und $(J, f) \le (J_0, f_0)$ für alle $(J, f) \in K$ (prüfe diese Behauptungen nach!) Also ist (J_0, f_0) eine obere Schranke für K. Somit ist $(M, \le)$ induktiv geordnet. Nach dem Zornschen Lemma hat M ein maximales Element (J_*, f_*). Wäre $J_* \subset J$, so gäbe es ein $j_0 \in J \setminus J_*$ und ein Element $x \in X_{j_0}$. Wir definieren $J^* := J_* \cup \{j_0\}$ und $f^*\colon J^* \to \bigcup_{j\in J^*} X_j$ via $f^*|_{J_*} := f_*$, $f^*(j_0) := x$. Dann ist $f^* \in \prod_{j\in J^*} X_j$ und $J_* \subset J^*$, somit f^* eine echte Fortsetzung von f_*, also $(J_*, f_*) < (J^*, f^*)$ im Widerspruch zur Maximalität von (J_*, f_*). Also doch $J_* = I$ und somit $f_* \in \prod_{j\in J_*} X_j = \prod_{j\in I} X_j$.

Mithilfe des Zornschen Lemmas kann man z.B. zeigen, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Den Beweis hierfür können Sie in der Übung selbst führen; er ist sehr ähnlich dem (nun folgenden) Beweis dafür, dass jeder Hilbertraum H ein vollständiges Orthonormalsystem besitzt. Bisher hatten wir Orthonormalsysteme als gewisse Familien $(b_i)_{i\in I}$ definiert. Im folgenden Beweis ist es zweckmäßig, eine Teilmenge $U \subseteq H$ als Orthonormalsystem zu bezeichnen, wenn die Familie $(b)_{b\in U}$ ein Orthonormalsystem im vorigen Sinne ist.

13.21 (Beweis von Satz 12.4). Sei M die Menge aller Orthonormalsysteme $U \subseteq H$ im gerade eingeführten Sinn. Wir ordnen M durch Inklusion: $U_1 \leq U_2 :\Leftrightarrow U_1 \subseteq U_2$. Ist $K \subseteq M$ eine Kette, so ist $U_0 := \bigcup_{U\in K} U$ ein Orthonormalsystem (nachprüfen!) und somit U_0 eine obere Schranke für K. Also ist $(M, \leq)$ induktiv geordnet. Das Zornsche Lemma liefert ein maximales Element $U_* \in M$. Nach Aufgabe G15 (d) ist der Abschluss $E := \overline{\mathrm{span}(U_*)}$ ein abgeschlossener Untervektorraum von H. Wäre dieser nicht ganz H, so wäre wegen $H = E \oplus E^\perp$ der Orthogonalraum $E^\perp \neq \{0\}$ und somit gäbe es ein Element $x \in E^\perp \setminus \{0\}$. Nach Ersetzen von x durch $x/\|x\|$ o.B.d.A. $\|x\| = 1$. Dann ist $x \notin U_*$ und $U^* := U_* \cup \{x\}$ ein Orthonormalsystem (nachprüfen!), somit $U_* < U^*$, im Widerspruch zur Maximalität von U_*. Also ist doch $\overline{\mathrm{span}(U_*)} = V$, somit U_* ein vollständiges Orthonormalsystem für H.

Wer sich mit dem Beweis des Tarskischen Fixpunktsatzes noch ein wenig auseinandersetzen will, kann die nächste Aufgabe probieren:

Aufgabe 13.22 Wir betrachten $M := [0, \infty] \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit der üblichen (totalen) Ordnung $\leq$. Machen Sie sich kurz klar, dass $(M, \leq)$ induktiv geordnet ist.

Die Selbstabbildung $f\colon M \to M$, $f(x) := x+1$ (mit $\infty+1 := \infty$) erfüllt die Voraussetzungen des Tarskischen Fixpunktsatzes. In diesem Fall sehen wir den (einzigen) Fixpunkt mit bloßem Auge. Finden Sie (explizit) den Durchschnitt M_0 aller abgeschlossenen Teilmengen von M.