Übung zur Funktionalanalysis, SS 2011

1. Präsenzübungsblatt

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass
$$d\colon M \times M \to \mathbb{R}_+, \quad d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$
eine Metrik auf einer beliebigen Menge M definiert. Beschreiben Sie für $x \in M$ die Kugeln
$$B_\varepsilon(x) := \{y \in M : d(x,y) = \varepsilon\}.$$

Aufgabe 2
Sei $n \geq 2$ und P ein Punkt in $\mathbb{R}^n$ (mit einer beliebigen Norm $\|\cdot\|$). Zeigen Sie, dass die Abbildung d eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ definiert:
$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & \text{wenn } P, x \text{ und } y \text{ auf einer Gerade liegen} \\ \|x-P\| + \|P-y\| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3
Sei M eine Untermenge eines metrischen Raums X. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Das Komplement von M ist offen.

(2) Jeder Häufungspunkt von M ist in M.

Aufgabe 4
Zeigen Sie die beiden folgenden Aussagen:

(1) Ist X ein vollständiger metrischer Raum und M eine abgeschlossene Teilmenge von X, so ist M vollständig.

(2) Ist X ein metrischer Raum und M eine vollständige Teilmenge von X, so ist M abgeschlossen.

Aufgabe 5
Zeigen Sie: Ein kompakter metrischer Raum ist vollständig.

Aufgabe 6
Wenn (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume sind, dann ist eine Isometrie eine Abbildung $f\colon X \to Y$, so dass
$$d_X(x,y) = d_Y(f(x), f(y))$$
für alle $x, y \in X$ gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Eine Isometrie ist injektiv.

(2) Eine surjektive Isometrie ist eine offene Abbildung, d.h. Bilder von offenen Mengen sind offen.

(3) Eine surjektive Isometrie besitzt eine stetige Umkehrfunktion.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass eine Abbildung zwischen metrischen Räumen genau dann stetig ist wenn Urbilder offener Mengen offen sind.