

Übung zur Funktionalanalysis, SS 2011

12. Hausübungsblatt – Lösungsskizze

Aufgabe 53

- Wir bemerken zuerst dass $p_2(x) \leq p_1(x)$ stets gilt. Sei U der Untervektorraum von ℓ^∞ so dass, Σx konvergiert. Mit Hahn-Banach definieren wir die Fortsetzung $L: \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ von $x \mapsto \lim \Sigma x$ bzgl. der sublinearen Abbildung p_2 (cf. Aufgabe 56 (3)). Deshalb ist der Punkt (2) trivialerweise wahr (benutzen Sie Aufgabe 56 (2) für die erste Aussage). Die zwei letzten Ungleichungen im Punkt (a) sind auch wahr. Für die zwei ersten Ungleichungen benutzen wir den zweiten Hinweis ($-f(x) = f(-x) \leq p(-x)$) und $\liminf(y_n) = -\limsup(-y_n)$.
- Für Punkt (1): $x_n \geq 0 \implies \liminf x \geq 0 \implies L(x) \geq 0$. Für Punkt (2) bemerken wir, dass $\sigma_n(Sx - x)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist (Teleskopsumme). Deshalb ist mit Eigenschaft (2) $L(Sx - x) = 0$, d.h. $L(Sx) = L(x)$.

Aufgabe 54

- (1) Sei $\varepsilon > 0$. Für $p \in \mathbb{N}$ sei $F_p = \{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \forall n > p, |f(nt)| \leq \varepsilon\}$. Diese Mengen sind abgeschlossen, da f stetig ist. Die Vereinigung von allen F_p ist $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Der Satz von Baire sagt dann, dass ein F_{p_0} ein nicht leeres Intervall (a, b) besitzt. Deshalb ist $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in (na, nb)$, wo $n \geq p_0$. Sobald $nb > (n+1)a$ (d.h. $n \geq \frac{a}{b-a}$) gilt, gibt es kein Loch zwischen (na, nb) und $((n+1)a, (n+1)b)$. Deshalb ist $|f(x)| < \varepsilon$ für $x \geq \max(p_0 a, (1 + \frac{a}{b-a})a)$.
- (2) Für alle $x \in X, \|x\| \leq 1$ und alle $y \in Y$ gilt $\|u(x, y)\| \leq \|u(\cdot, y)\| \cdot \|x\| \leq \|u(\cdot, y)\|$. Die $\|u(\cdot, y)\|$ sind für alle y beschränkt, deshalb gilt (Banach Steinhaus)

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} \|u(x, y)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|y \mapsto u(x, y)\| < \infty.$$

Aufgabe 55

- (1) Trivial.
- (2) Trivial.
- (3) Trivial.
- (4) Für alle $0 < \varepsilon < 1$ gilt $\|x\| \geq (1 - \varepsilon)\|x\|$ (da $\|\sum_{n=1}^N b_n^*(x)b_n\|$ gegen $\|x\|$ konvergiert) (Ausserdem ist es noch wahr für $\varepsilon = 0$). Wir brauchen eine solche Ungleichung eigentlich nur für eines ε . Ein Korollar der offenen Abbildung sagt dann, dass beide Normen äquivalent sind, sobald $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.
Wir schreiben $P_n(x)$ für $\sum_{i=1}^n b_i^*(x)b_i$. Sei (x_k) eine Cauchy-Folge für $\|\cdot\|$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert K_ε so dass $\|P_n x_k - P_n x_{k'}\| \leq \varepsilon, \forall k, k' \geq K_\varepsilon, \forall n \geq 1$ (*) gilt. Für ein beliebiges n ist die Folge $(P_n x_k)_k$ eine Cauchyfolge, so konvergiert sie gegen ein y_n . Die Einschränkungen von P_k auf $\text{span}(b_1, \dots, b_n)$ sind stetig, deshalb gilt $P_m x_k = P_m(P_n x_k) \rightarrow P_m y_n$ für $m \leq n$. d.h. $P_m y_n = y_m$ für $m \leq n$. So können wir y_n als eine Summe $\sum_{i=1}^n \xi_i b_i$. Wir betrachten die Ungleichung (*) wenn k' gegen ∞ strebt und kriegen:

$$\|P_n x_k - y_n\| \leq \varepsilon, \forall k \geq K_\varepsilon, \forall n \geq 1 \quad (**)$$

Durch ein $\frac{\varepsilon}{3}$ -Argument ist auch $(y_n)_n$ eine Cauchyfolge. Sei dann $x = \lim y_n = \sum_{i=1}^\infty \xi_i b_i$. Dann ist $y_n = P_n x$ und aus (**) finden wir für alle n und alle $k \geq K_\varepsilon$:

$$\|P_n x_k - P_n x\| = \|P_n x_k - y_n\| \leq \varepsilon.$$

So ist $\|x_k - x\| \leq \varepsilon$. d.h. $(X, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum, was noch zu beweisen war.

Induktion für die Stetigkeit von b_n^* :

Nach Definition von sup gilt $\|x\| \geq \|b_1^*(x)b_1\|$. Deshalb ist b_1^* stetig (mit Norm $\leq \frac{1}{\|b_1\|}$).

Dann benutzen wir $\|x\| \geq \|b_1^*(x)b_1 + b_2^*(x)b_2\| \geq \|b_2^*(x)b_2\| - \|b_1^*(x)b_1\| \geq \|b_2^*(x)b_2\| - \|x\|$.
 Deshalb gilt $\|b_2^*(x)b_2\| \leq 2\|x\|$. Ähnlich geht der Induktionsschritt von n nach $n + 1$.

Aufgabe 56

- (1) Ist x durch $M > 0$ beschränkt, so gilt auch $|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j| \leq \frac{1}{n} nM < M$. Daraus folgt $\|\Sigma\| \leq 1$ und die konstante Einsfolge zeigt $\|\Sigma\| = 1$.
- (2) Es genügt die Aussage für Nullfolgen zu zeigen. Konvergiert x gegen 0, und ist $\varepsilon > 0$, so gilt $|x_{m+k}| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und m geeignet (aber fix). Also gilt

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m x_j + \frac{1}{n} \sum_{j=m+1}^n x_j \right| \leq \frac{m \max_{j=1, \dots, m} |x_j|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für n genügend groß ist die rechte Seite dann kleiner als ε .

- (3) Für $\lambda > 0$ ist klar, dass $p_1(\lambda x) = \lambda p_1(x)$ und $p_2(\lambda x) = \lambda p_2(x)$ gelten.
 Aus $\sup(x_n + y_n) \leq \sup x_n + \sup y_n$ folgt dass $p_1(x + y) \leq p_1(x) + p_1(y)$ und $p_2(x + y) \leq p_2(x) + p_2(y)$.

Aufgabe 57

Aus der Dreieckungleichung für die Operatornorm folgt $\|\text{Id} + T\| \leq 1 + \|T\|$. Dass hier Gleichheit gilt folgt aus einem Widerspruchsbeweis: Sei $\|\text{Id} + T\| < 1 + \|T\|$. Dann ist $\|\frac{\text{Id} + T}{1 + \|T\|}\| < 1$, und mit der Neumannschen Reihe ist $\text{Id} - \frac{\text{Id} + T}{1 + \|T\|}$ invertierbar. Somit ist auch $(1 + \|T\|)(\text{Id} - \frac{\text{Id} + T}{1 + \|T\|}) = \|T\|\text{Id} - T$ invertierbar.