# VI Topologische Vektorräume und der Satz von Alaoglu-Bourbaki

Wir wollen nun eine wichtige Verbindung zwischen der Analysis und der Geometrie kennenlernen, die in der Theorie der $C^*$-Algebren zur vollen Entfaltung kommt. Dazu benötigen wir zunächst die folgenden, etwas allgemeineren Konzepte

**Satz VI.1.1** (Erinnerung) $(X,d)$: metr. Raum, $\tau := \{O \subseteq X \mid O \text{ offen}\} \in \mathcal{P}(X)$

Dann gilt

a) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$

b) $O_1, \dots, O_n \in \tau \Rightarrow O_1 \cap \dots \cap O_n \in \tau$

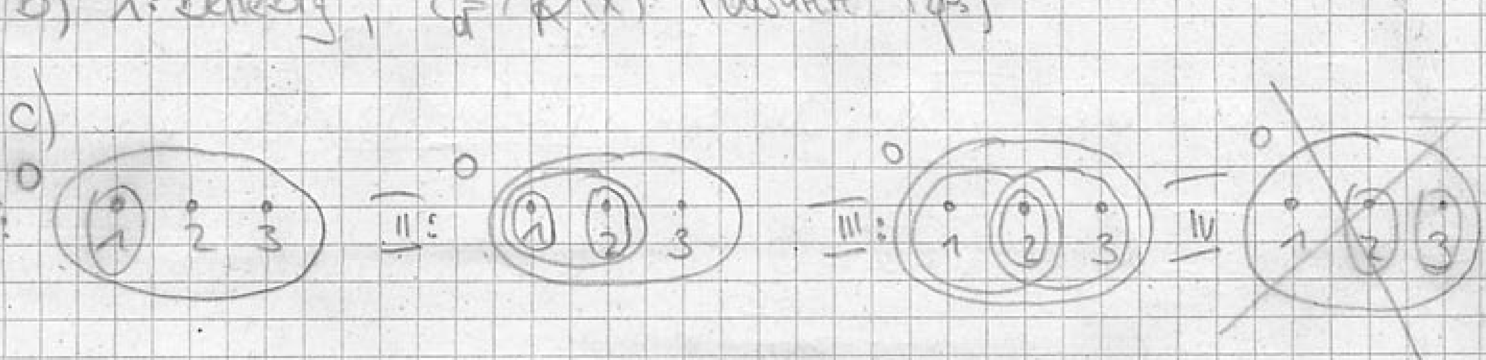
c) $(O_i)_{i \in I} \in \tau$ ($I$ beliebig) $= \bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$

**Def. VI.1.2** $X$: beliebige Menge. Eine Topologie auf $X$ ist ein System $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen, welches VI.1.1 a)–c) erfüllt. Das Paar $(X,\tau)$ heißt dann top. Raum. (+ offene / abgeschl. Mengen)

**Bsp. VI.1.3** a) $X$: beliebig, $\tau_c = \{\emptyset, X\}$ (chaotische Top.)

b) $X$: beliebig, $\tau_d = \mathcal{P}(X)$ (diskrete Top.)

c)



Satz $\overline{VI}$. 1.4 (Erinnerung) $(X, d_X), (Y, d_Y)$: metr. Räume, $f: X \to Y$.
Dann sind äquivalent

a) $f$ ist $(\varepsilon$-$\delta)$-stetig

b) $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

c) Für $O \subseteq Y$ offen ist $f^{-1}(O) \subseteq X$ offen

d) Für $A \subseteq Y$ abgeschl. ist $f^{-1}(A) \subseteq X$ abgeschl.

Satz/Def $\overline{VI}$.1.5. $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$: top. Räume, $f: X \to Y$.
Dann sind $\overline{VI}$.1.4 c) und $\overline{VI}$.1.4 d) äquivalent
und $f$ heißt stetig wenn es diese Bedingung erfüllt.

Bsp. $\overline{VI}$.1.6 a) $id: (X, \tau_X) \to (X, \tau_c)$ ist immer stetig, ebenso
$id: (X, \tau_d) \to (X, \tau_X)$

b) $(1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 2,\ 3 \mapsto 3): \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ bzgl. alle Top. $\tau_{II}, \tau_{III}$
(Bsp. $\overline{VI}$.1.3)

Lemma/Def $\overline{VI}$.1.6 $(X_i, \tau_{X_i})_{i\in I}$: Familie von top. Räumen. Dann
definiert

$$\tau_{\Pi} := \Big\{ O \subseteq \prod_{i\in I} X_i : \forall t \in O \text{ existieren } \underbrace{i_1, \dots, i_n}_{\text{endlich viele}},\ O_{i_k} \subseteq X_{i_k} \text{ offen}$$
$$\text{so dass } t \in \{(x_i)_{i\in I} : x_{i_k} \subseteq O_{i_k} \text{ für } k = 1, \dots, n\} \subseteq O \Big\}$$

eine Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$, die s.g. Produkttopologie.

(Erinnerung: $\prod_{i\in I} X_i := \{ f: I \to \bigcup_{i\in I} X_i : f(i) \in X_i \}$ und man
schreibt auch $(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ )

Bew.:

a) : klar

b) seien $O_1, \ldots, O_m \in \tau_\Pi$, $t \in O_1 \cap \ldots \cap O_m$

$\Rightarrow$ für $j = 1, \ldots, m$ ex. $i^j_1, \ldots, i^j_{n_j}$ und $O_{i^j_k} \subseteq X_i$ offen für $k = 1, \ldots, n_j$

$$\left.\begin{array}{l} \text{so dass } t_{i_k} \in O_{i^j_k} \text{ für alle } k = 1, \ldots, n_j \\ \text{und } \{(s_i)_{i \in I} : s_{i_k} \in O_{i^j_k} \; \forall k = 1, \ldots, n_j\} \subseteq O_j \end{array}\right\} \text{für } j = 1, \ldots, m$$

$\Rightarrow t \in \{(s_i)_{i \in I} : s_{i_k} \in O_{i^j_k} \; \forall k = 1, \ldots, n_j, \text{ für } j = 1, \ldots, m\} \subseteq O_1 \cap \ldots \cap O_m$

und da $\{i^1_1, \ldots, i^1_{n_1}, i^2_1, \ldots, i^2_{n_2}, \ldots, i^m_1, \ldots, i^m_{n_m}\}$ endlich ist

ist also $O_1 \cap \ldots \cap O_m$ offen nach Definition

c) seien $O_j \in \tau_\Pi$ für $j \in J$, $t \in \bigcup_{j \in J} O_j$

$\Rightarrow \exists\, j \in J$, $i_1, \ldots, i_n$ und $O_{i_k} \subseteq X_i$ offen für $k = 1, \ldots, n$

so dass $t_{i_k} \in O_{i_k}$ für $k = 1, \ldots, n$ und $\{(s_i)_{i \in I} : s_{i_k} \in O_{i_k} \text{ für } k = 1, \ldots, n\} \subseteq O_j$

$\Rightarrow t \in \{(s_i)_{i \in I} : s_{i_k} \in O_{i_k} \text{ für } k = 1, \ldots, n\} \subseteq O_j \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$ ∎

Def. VI. 1.7 Ein top. Vektorraum ist ein Vektorraum $X$, zusammen mit einer Topologie auf $X$, so dass

add: $X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$ mult: $\mathbb{K} \times X \to X$ $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$

stetig sind.

Bem. VI. 1.8: Die diskrete / chaotische Topologie ist keine Vektorraumtop.!
Man kann also nicht jeden Vektorraum o.B.d.A zu einem top. VR machen!

Bsp. VI 1.8 a) normierte Räume

b) Für $0<p<1$ ist

$$\ell^p := \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum |x_n|^p < \infty \}$$

ein Vektorraum und

$$d(x,y) := \|x-y\|_p := \left( \sum |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

definiert eine Metrik hierauf und somit eine Topologie.
Man kann zeigen dass

$$(x,y) \longmapsto x+y$$
$$\lambda, x \longmapsto \lambda x$$

stetige Abb. sind und somit wird $\ell^p$ auch für $0<p<1$ zu einem top. (sogar metrischen) VR.

Allerdings gilt hier der Satz von Hahn-Banach nicht: $(\ell^p)' = \{0\}$ (Übung)

Die folgenden top. VR sind die natürliche Verallgem. normierter Räume

**Def VI.1.9** $X$: V.R. $(p_i)_{i\in I}$ $p_i : X \to \mathbb{R}$ Halbnorm heißt punktetrennende Familie falls

$$p_i(x) = 0 \quad \forall i \in I \implies x = 0 \quad \text{gilt}$$

**Bsp. VI.1.10** a) $X = \mathbb{K}^n$ $p_i(x_1, \dots, x_n) = |x|_i$
(ebenso: $I$ endlich $\Rightarrow$ $x \mapsto \sum_{i\in I} p(x_i)$ def. Norm)

b) $X$: normiert $\Rightarrow$ $(|x'|)_{x' \in X'}$ ist punktetrennend (Hahn-Banach)

c) $Y$: beliebig, $X := \{\lambda : Y \to \mathbb{K} \mid \text{linear}\} \Rightarrow (L_y)_{y\in Y}$
mit $(L_y)(\lambda) = \lambda(y)$ ist punktetrennend (auf $X$), da

$$L_y(\lambda) = \lambda(y) = 0 \ \forall y \in Y \iff \lambda = 0 \quad (\text{per Def.})$$

d) $T$: top. Raum, $T = \bigcup_{i\in I} K_i$ mit $K_i \subset T$ kompakt $\Rightarrow p_i(f) := \sup\{f(x) : x \in K_i\}$

**Satz VI.1.11** Sei $(p_i)_{i\in I}$ punktetrennend auf $X$. Für $F \subseteq I$ endlich und $\varepsilon > 0$ setze

$$U_{F,\varepsilon} := \{x \in X : p_i(x) < \varepsilon \ \forall i \in F\}$$

(ersetzt die offenen $\varepsilon$-Umgebungen der normierten Räume)

Dann definiert

$$\mathcal{T} := \{O \subseteq X : \forall x \in O \ \exists F \subseteq I \text{ endlich}, \varepsilon > 0 \text{ mit } x + U_{F,\varepsilon} \subseteq O\}$$

eine Topologie auf $X$ bezgl der

$$(x, y) \longmapsto x + y$$
$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$$

stetige Abbildungen sind.

Bew.:

a) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$ klar

b) $O_1, \dots, O_m \in \tau$, $x \in O_1 \cap \dots \cap O_m$

$\Rightarrow$ für $j = 1, \dots, m$ $\exists$ $F_j \subseteq I$ endlich, $\varepsilon_j > 0$ mit

$x + U_{F_j, \varepsilon_j} \subseteq O_j$

$\Rightarrow$ für $F := \bigcup_{j=1}^m F_j$, $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j\}$ gilt

$x + U_{F,\varepsilon} \subseteq O_j$ für $j = 1, \dots, m \Rightarrow x + U_{F,\varepsilon} \subseteq O_1 \cap \dots \cap O_m$

c) $O_j \in \tau$ für $j \in J$, $x \in \bigcup_{j \in J} O_j$ $\Rightarrow$ $x \in O_{j_0}$ für ein $j_0 \in J$

$\Rightarrow$ $\exists$ $F \subseteq I$ endlich, $\varepsilon > 0$ mit $x + U_{F,\varepsilon} \subseteq O_{j_0} \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$.

$\Rightarrow$ $\tau$ ist Topologie

Bleibt zu zeigen: für $O \subseteq X$ offen ($:\Leftrightarrow O \in \tau$) sind

$\tilde{O} := \{(x,y) : x + y \in O\}$ offen

$\hat{O} := \{(\lambda, x) : \lambda x \in O\}$ offen

Für $(x,y) \in \tilde{O}$ wähle $F, \varepsilon$ mit $x + y + U_{F,\varepsilon} \subseteq O$ (da $O$ offen)

$\Rightarrow$ $x + U_{F,\frac{\varepsilon}{2}} \times y + U_{F,\frac{\varepsilon}{2}}$ ist offen in $X \times X$ und erfüllt

$x + U_{F,\frac{\varepsilon}{2}} + y + U_{F,\frac{\varepsilon}{2}} \subseteq x + y + U_{F,\varepsilon} \subseteq O$ ($\Delta$-Ungl.)

Für $(\lambda, x) \in \hat{O}$ wähle $F, \varepsilon$ mit $\lambda x + U_{F,\varepsilon} \subseteq O$

$\Rightarrow$ $\exists$ $\varepsilon' > 0$ mit $\varepsilon' \cdot x \in U_{F,\frac{\varepsilon}{2}}$ $\quad$ ( $\varepsilon' > \frac{2}{\varepsilon} \cdot \max_{i \in F} p_i(x)$ beliebig) außerdem gilt $(\mu-\lambda)\cdot x \in U_{F,\frac{\varepsilon}{2}}$ falls $|\mu-\lambda| < \varepsilon$ (nach Def.)

Wähle nun $\tilde{F}, \tilde{\varepsilon}$ so, dass $\mu \cdot U_{\tilde{F},\tilde{\varepsilon}} \subseteq U_{F,\frac{\varepsilon}{2}}$ falls $|\mu| \leq |\lambda| + \varepsilon$

$\left( \text{z.B. } F = \tilde{F}, \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2(|\lambda|+\varepsilon)} \right)$

$\Rightarrow$ Für $|\lambda-\mu| < \varepsilon$, $y \in U_{\tilde{F},\tilde{\varepsilon}}$ gilt

$$\mu(x+y) - \lambda x + \lambda x = (\mu-\lambda)x + \mu y + \lambda x \in \underbrace{U_{F,\frac{\varepsilon}{2}} + U_{F,\frac{\varepsilon}{2}}}_{\subseteq U_{F,\varepsilon}} + \lambda x \subseteq O$$

$\Rightarrow \{|\lambda-\mu| < \varepsilon\} \cdot U_{\tilde{F},\tilde{\varepsilon}} \subseteq O \Rightarrow (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ stetig. ∎

Def. VI.1.12 Die o.g. Topologie heißt auch die von $(p_i)_{i\in I}$ auf $X$ erzeugte lokal konvexe Vektorraumtopologie.

Bem. VI.1.12 Diese Top. heißt lokal konvex, da sie eine (Umgebungs-) Basis aus konvexen Mengen besitzt. Existiert andererseits eine solche Basis, so existiert auch eine Familie $(p_i)_{i\in I}$, die die Top. erzeugt (vgl. Werner Satz VIII.1.5).

Bsp. VI.1.13 a) $X$: normiert $\Rightarrow (|x'|)_{x'\in X'}$ erzeugt eine Vektorraumtopologie auf $X$, die s.g. schwache Top.

b) $Y$: normiert, $X := Y' \Rightarrow (L_y)_{y\in Y}$ ist punktetrennend. Die hiervon erzeugte Topologie auf $Y'$ heißt die schwach-$*$-Top.

Die schwach-$*$-Top. wird die wichtige Kompaktheitseigenschaft haben, die Ziel dieses Kapitels ist.

Def. VI.1.14 $(X,\tau)$: top. Raum. $(O_i)_{i\in I}$ mit $O_i\in\tau$ für $i\in I$ heißt offene Überdeckung falls $\bigcup_{i\in I} O_i = X$.

$(X,\tau)$ heißt kompakt, wenn für jede offene Überd. $(O_i)_{i\in I}$ endlich viele $i_1,\dots,i_m$ ex. mit $O_{i_1}\cup\dots\cup O_{i_m} = X$.

Lemma VI.1.15: $X$ kompakt, $U\subseteq X$ abgeschl. $\Rightarrow U$ kompakt Bew: Übung ■

Satz VI.1.16 (Tychonoff) $((X_j,\tau_j))_{j\in J}$ top. Räume. Dann gilt

$$X_j \text{ kompakt für jedes } j\in J \Rightarrow \left(\prod_{j\in J} X_j, \tau_\pi\right) \text{ kompakt}$$

Bew.: Werner, Anhang B. ■

Def. VI.1.17 a) $X$: Vektorraum, $A\subseteq X$. Dann heißt $A$ kreisförmig falls

$$\{\lambda\in\mathbb{K}: |\lambda|\leq 1\}\cdot A \subseteq A$$

und $A$ heißt absolutkonvex wenn $A$ kreisförmig und konvex ist

b) $X$: normiert, $A\subseteq X$. Dann heißt

$$A^\circ := \{x'\in X': \operatorname{Re} x'(x)\leq 1 \ \forall x\in A\}$$

die Polare von $A$.

Lemma VI.1.18 a) $A^\circ$ ist konvex und abgeschlossen bzgl. der schwach-*-Topologie

b) $A$ kreisförmig $\Rightarrow$ $A^\circ = \{x'\in X': |x'(x)|\leq 1 \ \forall x\in A\}$

c) $(B_X)^\circ = B_{X'}$

Bew.: a) $A^\circ$ ist Schnitt abgeschl. konvexer Mengen

b)+c): klar.

Theorem VI. 1.19 (Alaoglu-Bourbaki): Für jede Nullumg. U ist

$U^\circ$ kompakt in der schwach-*-Topologie

Bew.: Betrachte die Einbettung

$$X' \overset{\phi}{\hookrightarrow} \mathrm{Map}(X, \mathbb{K}) = X^{\mathbb{K}} = \prod_{x \in X} \mathbb{K}_x$$

Wenn $X'$ die schwach-*-Topologie trägt ist ein stetige injektive Abbildung und die Top. auf dem Bild ist gleich der schwach-*-Topologie (Übung). Daher reicht es zu zeigen, dass $\phi(U^\circ)$ kompakt ist.

Zunächst ist o.B.d.A U konvex und kreisförmig, da jede Nullumg. U eine solche V enthält und offensichtlich $U^\circ \subseteq V^\circ$ gilt.

Für $x \in X$ sei $\lambda_x > 0$ mit $x \in \lambda_x U$ und $\lambda_x \leq 1$ falls $x \in U$. Also gilt

$$(*) \quad |x'(x)| \leq \lambda_x \quad \text{falls } x' \in U^\circ \qquad (\text{Lemma VI. 1.18 b)})$$

$$\Rightarrow \quad K_x := \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \lambda_x\} \text{ kompakt, ebenso wie}$$

$$K := \prod_{x \in X} K_x = \{f \in X^{\mathbb{K}} : f(x) \in K_x \ \forall x \in X\}$$

und (*) zeigt $\phi(U^\circ) \subseteq K$.

Es bleibt also zu zeigen, dass $\phi(U^\circ)$ abgeschl. ist (vgl. Lemma VI 1.15).

Sei

$$\overline{\Phi(U^\circ)} := \bigcap \{ A \subseteq X^{\mathbb{K}} : A \text{ abgeschlossen}, \Phi(U^\circ) \subseteq A \}$$

Zeige: $\overline{\Phi(U^\circ)} = \Phi(U^\circ)$ ($\Rightarrow \Phi(U^\circ)$ abgeschl.) Für $f_0 \in \overline{\Phi(U^\circ)}$ wähle $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$\{f \in X^{\mathbb{K}} : |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon\} \cap \{f \in X^{\mathbb{K}} \mid |f(y) - f_0(y)| < \varepsilon\}$$
$$\cap \{f \in X^{\mathbb{K}} \mid |f(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x - \beta y)| < \varepsilon\}$$

ist offen in $(X^{\mathbb{K}}, \tau_\pi)$ $\{$da $ev_x : X^{\mathbb{K}} \to X$ $f \mapsto f(x)$ stetig$\}$

und nicht-leer (enthält $f_0$) $\Rightarrow$ enthält ein $f \in \Phi(U^\circ)$.

Da $f$ linear ist gilt

$$f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y) = (f_0 - f)(\alpha x + \beta y) + \alpha (f - f_0)(x) + \beta (f - f_0)(y)$$

$$\Rightarrow |\quad| < (1 + |\alpha| + |\beta|) \cdot \varepsilon$$

Da $\varepsilon$ beliebig war ist also $f_0$ linear.

Da $\lambda_x \leq 1$ gilt außerdem $\overset{\text{nach Def.}}{}$ $f_0(U) \subseteq \{f \in \mathbb{K}^X : |f(x)| \leq 1 \ \forall x \in U\}$

$\Rightarrow f_0$ ist sogar stetig

$\Rightarrow f_0 \in \Phi(U^\circ) \Rightarrow \overline{\Phi(U^\circ)} = \Phi(U^\circ)$ (da $\Phi(U^\circ) \subseteq \overline{\Phi(U^\circ)}$ offensichtlich). ■

**Korollar VI.1.20** Jeder Banachraum ist isometrisch isomorph zu einem abgeschl. Unterraum von $C(T)$ für einen kompakten Raum $T$.

__Bew.:__ Setze $K := B_{X'}$ mit der schwach-$*$-Top. Die Abb.

$$\Phi : X \to C(K) \quad \Phi(x)(y) = y(x)$$

ist injektiv und nach Kor. II.1.12 isometrisch. Daher ist das Bild abgeschlossen. $\blacksquare$