V Spektraltheorie kompakter Operatoren

Frage: Diagonalisierbarkeit linearer Abbildungen?

$\rightsquigarrow$ i. A. keine Theorie hierzu, nur wenn man noch "topologische" Information hinzunimmt

Bsp.: a) Ist $(x_i)_{i\in I}$ eine Basis eines Vektorraums X, so kann man jede Funktion $f: I \to \mathbb{K}$ als Operator auffassen, gegeben durch $x_i \mapsto f(i)\cdot x_i$.

b) Ist X normiert, $A = \{x_i : i \in I\}$ eine linear unabhängige Menge mit $\overline{\operatorname{span} A} = X$ und $f: I \to \mathbb{K}$ beschränkt, so kann man $x_i \mapsto f(i)\cdot x_i$ zu einer linearen Abbildung T_f mit $\|T_f\| = \|f\|_\infty$ machen. (Bsp.: ONB von Hilbertr.)

Die Frage ist also wann ein gegebener Operator sich als ein solcher "Multiplikationsoperator" schreiben lässt.

V.1 Kompakte Operatoren

Def. V.1.1: X, Y Banachräume. Dann heißt $T \in L(X,Y)$ kompakt wenn $\overline{T(B_X)}$ in Y kompakt ist. Die Menge der kompakten Operatoren wird mit $K(X,Y)$ bezeichnet. (Dies ist genau dann der Fall wenn $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

Bsp. V.1.2 a) Ist $\dim Y < \infty$, so ist jedes $T \in L(X,Y)$ kompakt.

b) Ist $\dim(\operatorname{im}(T)) < \infty$, so kann man T faktorisieren

$$X \xrightarrow{T'} \operatorname{im}(T) \hookrightarrow Y$$

mit T' kompakt. Da $\hookrightarrow$ stetig & abgeschlossen ist also

$$\overline{T'(B_X)} = \overline{T(B_X)}$$

kompakt und somit T.

Satz V.1.3 a) X, Y Banachräume $\Rightarrow K(X,Y) \subseteq L(X,Y)$ ist abgeschl.

b) X, Y, Z Banachräume, $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$. Ist entweder S oder T kompakt, so ist es $S \circ T$.

Bew.: a) $T \in K(X,Y) \Rightarrow \lambda \cdot T \in K(X,Y)$: klar

$S, T \in K(X,Y)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ s.d. $(S x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(T x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert

$\Rightarrow ((S+T)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Rightarrow S+T \in K(X,Y)$

Abgeschlossenheit: Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|T_n - T\| \to 0$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt (o.B.d.A. $\|x_n\| \le 1 \ \forall n\in\mathbb{N}$)

$\Rightarrow$ ex. Teilfolge $(x_n^{(1)})_{n\in N_1 \subseteq \mathbb{N}}$ so dass $(T x_n)_{n\in N_1}$ konvergiert

$\Rightarrow$ ex. Teilfolge $(x_n^{(2)})_{n\in N_2 \subseteq N_1 \subseteq \mathbb{N}}$ so dass $(T x_n)_{n\in N_2}$ konv.

...

$\Rightarrow$ ex. Teilfolge $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ so dass

$$(T_n \xi_i)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert } \forall n \in \mathbb{N}$$

z.Z.: $(T\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert (via $\frac{\varepsilon}{3}$-Argument)

Für $\varepsilon > 0$ wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n - T\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ und $i_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|T_n \xi_i - T_n \xi_j\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \quad i,j \geq n_0$$

$$\Rightarrow \|T\xi_i - T\xi_j\| \leq \|T\xi_i - T_n\xi_i\| + \|T_n\xi_i - T_n\xi_j\| + \|T_n\xi_j - T\xi_j\|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\Rightarrow (T\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert, da Y vollständig.

b) klar, da stetige Operatoren beschränkte und konvergente Folgen auf solche abbilden. ▨

<u>Korollar</u> V.1.4: X,Y: Banachr. $T_n, T \in L(X,Y)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\dim(\operatorname{im}(T_n)) < \infty$. Dann gilt

$$\|T_n - T\| \to 0 \Rightarrow T \in K(X,Y) \quad .$$

<u>Bew.</u>: Da $T_n \in K(X,Y)$ folgt dies aus der Abgeschlossenheit von $K(X,Y)$.

Das folgende Kriterium ist sehr nützlich um Kompaktheit festzustellen:

<u>Satz V. 1.5</u> (Arzela-Ascoli) Sei S kompakter metrischer Raum und $M \subseteq C(S, \mathbb{K})$. Dann ist $\overline{M}$ kompakt falls

a) M beschränkt ist und

b) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall f \in M \quad d(s,t) \leq \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$ (*)

("M ist gleichgradig stetig", also jedes $x \in M$ ist gleichmäßig stetig und δ hängt nur von ε, nicht von f ab)

<u>Bew.:</u>

S kompakt $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \; \exists s_1^{(n)}, \dots, s_{m_n}^{(n)}$ mit $S = \bigcup_{i=1}^{m_n} \{x \in S : d(x, s_i) \leq \frac{1}{n}\}$

$\Rightarrow \{s_i^{(n)} : 1 \leq i \leq m_n\}$ ist dicht $\Rightarrow S$ separabel

Sei also $\{s_1, s_2, \dots\}$ dicht in S.

z.Z.: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $M \Rightarrow \exists$ konvergente Teilfolge

•) $\forall s \in S$: $(x_n(s))_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt $\Rightarrow \exists$ konv. Teilfolge

$\Rightarrow$ ex. Teilfolge $(x_{n_i}^{(1)})_{i \in \mathbb{N}}$ mit $(x_{n_i}^{(1)}(s_1))_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert

$\Rightarrow$ ex. Teilfolge (hiervon) $(x_{n_j}^{(2)})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $(x_{n_j}^{(2)}(s_2))_{j \in \mathbb{N}}$ konv.

$\vdots$

$\Rightarrow$ ex. Teilfolge $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ so dass $(y_i(s_n))_{i \in \mathbb{N}}$ konv. $\forall n \in \mathbb{N}$.

∘) Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta > 0$ so dass (*) für $\frac{\varepsilon}{3}$ gilt.

$$\Rightarrow S = \bigcup_{k=1}^{m} B_{p_k}\left(\frac{\delta}{2}\right) \text{ für geeignete } p_k \in S$$

Da $\{s_1, s_2, \dots\}$ dicht ex. für p_k ein $s_{n_k} \in B_{p_k}\left(\frac{\delta}{2}\right)$

∘) Wähle $i_0 = i_0(\varepsilon)$ so dass

$$|y_i(s_{n_k}) - y_j(s_{n_k})| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, i,j \geq n_0 \text{ und } k = 1, \dots, m$$

∘) $\forall s \in S$ gilt: $s \in B_{p_k}\left(\frac{\delta}{2}\right)$ für p_k geeignet

$$\Rightarrow d(s, s_{n_k}) \leq d(s, p_k) + d(p_k, s_{n_k}) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

$$\Rightarrow |y_i(s) - y_i(s_{n_k})| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

∘) $\frac{\varepsilon}{3}$-Argument zeigt nun: $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist C.F.:

$$|y_i(s) - y_j(s)| \leq |y_i(s) - y_i(s_{n_k})| + |y_i(s_{n_k}) - y_j(s_{n_k})| + |y_j(s_{n_k}) - y_j(s)|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon$$

Da $s \in S$ beliebig war ist $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine C.F. und da $\overline{M}$ abgeschlossen ist konvergiert diese Teilfolge. ∎

Beispiel V.1.5 (Fredholmoperatoren): Sei $k:[0,1]^2 \to \mathbb{K}$ stetig und

$$T_k : C[0,1] \to C[0,1] \qquad (T_k x)(s) = \int_0^1 k(s,t)\, dt$$

(vgl. Bsp. I.3.15). Dann ist T_k kompakt:

$M := T_k(B_{C[0,1]})$ ist

- beschränkt, da T_k stetig
- gleichgradig stetig, da k gleichmäßig stetig (vgl. Argument aus Bsp. I.3.15)

$\Rightarrow$ $\overline{M}$ ist kompakt.

V.2 Operatoren auf Hilberträumen

In diesem Abschnitt sei H (oder H_i) immer ein Hilbertraum

Def. V.2.1: Für $T \in L(H_1, H_2)$ sei

$$T' : H_2' \to H_1' \quad T'(y')(x) = y'(Tx)$$

der zu T duale Operator und $\Phi_i : H_i \to H_i'$ der antilineare Isomorphismus aus Satz IV.3.6. Dann heißt

$$T^* := \Phi_1^{-1} \circ T' \circ \Phi_2 \; : H_2 \to H_1$$

der zu T adjungierte Operator.

Lemma V.2.2: Es gilt

a) $T^* \in L(H_2, H_1)$

b) T^* ist eindeutig bestimmt durch

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^* y \rangle_{H_1} \qquad \forall x \in H_1, y \in H_2$$

Bew.: a) Additivität: klar, Skalarmult:

$$T^*(\lambda x) = \Phi_1^{-1}(T_1'(\Phi_2(\lambda x))) = \Phi_1^{-1}(T_1'(\bar\lambda \Phi_2(x)))$$
$$= \Phi_1^{-1}(\bar\lambda T_1'(\Phi_2(x))) \overset{=}{=} \lambda \Phi_1^{-1}(T_1'(\Phi_2(x))) = \lambda T^*(x).$$

Da $\|T'\| \leq \|T\|$ (warum?) ist T^* stetig

b) Sei $S \in L(H_2, H_1)$ mit $\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, Sy \rangle_{H_1} = \langle x, T^* y \rangle_{H_1} \; \forall x, y$

$$\Rightarrow \langle \cdot, Sy \rangle_{H_1} = \langle \cdot, T^* y \rangle_{H_1} \Rightarrow \Phi_1(Sy) = \Phi_1(T^* y) \Rightarrow Sy = T^* y \; \forall y \in H_2. \blacksquare$$

<u>Satz V.2.3:</u> Für $S, T \in L(H_1, H_2)$ und $R \in L(H_2, H_3)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

a) $(S+T)^* = S^* + T^*$

b) $(\lambda S)^* = \bar{\lambda} S^*$

c) $(RS)^* = S^* R^*$

d) $S^{**} = S$

e) $\|S^*\| = \|S\|$

f) $\|S S^*\| = \|S S^*\| = \|S\|^2$

g) $\ker S = (\operatorname{im} S^*)^\perp$ und $\ker S^* = (\operatorname{im} S)^\perp$

<u>Bew.:</u> a) - d) ist klar mit dem vorigen Lemma.

e) $\|S\| = \|(S^*)^*\| \underset{\Phi \text{ Isometrie}}{=} \|(S^*)'\| \leq \|S^*\| = \|S'\| \leq \|S\|$

f) $\|Sx\|^2 = \langle Sx, Sx\rangle = \langle x, S^*Sx\rangle \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|x\| \, \|S^*Sx\|$

$\Rightarrow \|S\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Sx\|^2 \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\| \, \|S^*Sx\| \leq \|S^*S\| \leq \|S^*\| \, \|S\| = \|S\|^2$

$\Rightarrow \|S\|^2 = \|S^*S\|$ und $\|S\|^2 = \|S^*\|^2 = \|SS^*\|$.

g) $x \in \ker(S) \Leftrightarrow Sx = 0 \Leftrightarrow \langle Sx, y\rangle = 0 \ \forall y \in H_2$

$\Leftrightarrow \langle x, S^*y\rangle = 0 \ \forall y \in H_2 \Leftrightarrow x \in \operatorname{im}(S^*)^\perp$

und $\ker S^* = (\operatorname{im} S^{**})^\perp = (\operatorname{im} S)^\perp$.

Def. V.2.4 $T \in L(H_1, H_2)$ heißt

- unitär falls $TT^* = id_{H_2}$ und $T^*T = id_{H_1}$
- selbstadjungiert falls $H_1 = H_2$ und $T = T^*$
- normal falls $H_1 = H_2$ und $T^*T = TT^*$

Bsp. V.2.5: a) $\lambda \in L(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ist

- unitär falls $\lambda \cdot \bar{\lambda} = 1 (= \bar{\lambda} \cdot \lambda) \Leftrightarrow |\lambda| = 1$
- selbstadjungiert falls $\lambda = \bar{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

b) $T: \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\lambda_n \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ist

- unitär falls $|\lambda_n| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$
- selbstadjungiert falls $\lambda_n \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

c) $T: \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}) \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

(Shiftoperator) erfüllt

$$T^*((y_1, y_2, \dots)) = (0, y_1, y_2, \dots) \quad \text{(Lemma V.2.2 b))}$$

und $TT^* = id_{\ell^2}$, T^*T ist die Projektion auf

$$U = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ x_1 = 0\}$$

Lemma V.2.6: Sei $T \in L(H_1, H_2)$. Dann gilt

a) T ist Isometrie $\Leftrightarrow$ $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in H_1$

b) T ist unitär $\Leftrightarrow$ T ist surjektive Isometrie

Bew.

a) "$\Leftarrow$" setze $x = y$, $\Rightarrow$ folgt daraus dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ durch $\|\cdot\|$ bestimmt ist.

b) T unitär $:\Leftrightarrow$ $\langle x, y \rangle = \langle x, T^* T y \rangle = \langle Tx, Ty \rangle \quad \forall x, y \in H_1$ und T ist invertierbar. ■

Satz V.2.7: Ist $S : H \to H$ linear und erfüllt

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle \quad \forall x, y \in H$$

so ist S stetig (und somit selbstadjungiert).

Bew.: Zeige: S ist abgeschlossener Operator (vgl. Satz vom abgeschl. Graphen), also

$$\underbrace{(x_n \to 0 \text{ und } Tx_n \to z)} \overset{!}{\Rightarrow} z = 0$$

$$\Rightarrow \langle z, z \rangle = \langle \lim Tx_n, z \rangle = \lim \langle x_n, Tz \rangle = 0. \quad ■$$

Satz V.2.8: Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $T \in L(H)$ sind äquivalent

a) T ist selbstadjungiert

b) $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$

Bew.: a) ⇒ b): $\langle Tx,x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx,x\rangle}$

b) ⇒ a): Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist

$$\langle T(x+\lambda y), x+\lambda y\rangle = \langle Tx,x\rangle + \lambda\langle Ty,x\rangle + \bar\lambda\langle Tx,y\rangle + |\lambda|^2\langle Ty,y\rangle$$

reell, also gleich seinem Konjugierten

$$\langle Tx,x\rangle + \bar\lambda\,\overline{\langle x,Ty\rangle} + \lambda\,\overline{\langle y,Tx\rangle} + |\lambda|^2\langle Ty,y\rangle$$

Für $\lambda = 1$ und $\lambda = i$ folgt

$$\langle Tx,y\rangle + \langle Ty,x\rangle = \overline{\langle y,Tx\rangle} + \overline{\langle x,Ty\rangle}$$

$$\langle Tx,y\rangle - \langle Ty,x\rangle = -\overline{\langle y,Tx\rangle} + \overline{\langle x,Ty\rangle}$$

$$\Rightarrow \langle Tx,y\rangle = \langle x,Ty\rangle.$$ ▨

Satz V.2.9 Für $T \in L(H)$ selbstadjungiert gilt

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1} |\langle Tx,x\rangle|$$

Bew.: $|\langle Tx,x\rangle| \overset{\text{Cauchy-Schw.}}{\le} \|Tx\|\,\|x\| \le \|T\|\,\|x\|^2 \Rightarrow$ "$\ge$"

"$\le$": Setze $M := \sup_{\|x\|\le 1} |\langle Tx,x\rangle|$. Aus $T = T^*$ folgt dann

$$\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle = 4\,\mathrm{Re}\,\langle Tx,y\rangle$$

$$\Rightarrow 4\,\mathrm{Re}\,\langle Tx,y\rangle \le M\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) \underset{\text{Parallelogrammgl.}}{=} 2M\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\,\langle Tx,y\rangle \le M \quad \forall\, \|x\|,\|y\| \le 1$$

$$\Rightarrow |\langle Tx,y\rangle| \le M$$ (da invariant unter Multiplikation von x und y mit Skalaren vom $|\cdot| = 1$). ▨

Korollar V.2.10 Ist $T \in L(H)$ selbstadjungiert und gilt
$\langle Tx, x\rangle = 0 \ \forall x \in H$, so ist $T = 0$

Satz V.2.11 (Selbstadjungierte Projektionen) Für eine Projektion $0 \neq P \in L(H)$ sind äquivalent:

a) P ist Orthogonalprojektion (also $\operatorname{im}(P) = \ker(P)^\perp$)

b) $\|P\| = 1$

c) $P = P^*$

d) $PP^* = P^*P$

e) $\langle Px, x\rangle \geq 0 \ \forall x \in H$

Bew.: a) $\Rightarrow$ b) : Satz von der Orthogonalprojektion (IV.3.4)

b) $\Rightarrow$ a) : Für $x \in \ker(P)$, $y \in \operatorname{im}(P)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\|\lambda y\|^2 = \|P(x+\lambda y)\|^2 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\bar{\lambda}\langle x, y\rangle + \|\lambda y\|^2$$

$$\Rightarrow -\lambda \operatorname{Re}\langle x, y\rangle \leq \|x\|^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Re}\langle x, y\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{Re}\lambda\langle x, y\rangle}_{= \lambda \cdot \operatorname{Im}\langle x, y\rangle} \leq \|x\|^2 \ \forall \lambda \in i\mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Im}\langle x, y\rangle = 0$$

a) $\Rightarrow$ c) : $\langle Px, y\rangle = \langle Px, y - \underbrace{(y - Py)}_{\in P(H)^\perp}\rangle = \langle Px, Py\rangle = \langle Px + (x - Px), Py\rangle$
$= \langle x, Py\rangle$

c) $\Rightarrow$ d) : klar

d) $\Rightarrow$ a) : $0 = \langle (P^*P - PP^*)x, x\rangle = \|Px\|^2 - \|P^*x\|^2 \ \forall x \in H$

$$\Rightarrow \ker(P) = \ker(P^*) = \operatorname{im}(P)^\perp$$

c) $\Rightarrow$ e) : $\langle Px, x\rangle = \langle P^2x, x\rangle = \langle Px, Px\rangle = \|Px\|^2 \geq 0$

e) $\Rightarrow$ a) : Für $x \in \ker(P)$, $y \in \operatorname{im}(P)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq \langle P(x+\lambda y), x+\lambda y\rangle = \lambda \langle y, x\rangle + \lambda^2 \|y\|^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \langle y, x\rangle \geq -\lambda \|y\|^2 \quad \forall \lambda > 0 \\ \quad\ \langle y, x\rangle \leq -\lambda \|y\|^2 \quad \forall \lambda < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle y, x\rangle = 0 .$$ ▨

__Lemma__ V.2.12 Ist $T \in L(H)$ normal, so gilt

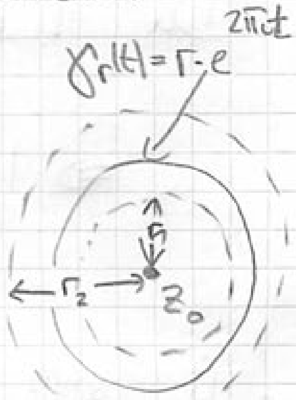
$$\|Tx\| = \|T^*x\| \qquad \forall x \in H,$$

insbesondere also $\ker T = \ker T^*$.

__Bew.:__ Wie im vorigen Bew. d) $\Rightarrow$ a). ▨

Einschub: Etwas Funktionentheorie

<u>Def</u>: •) analytische Funktion $\longleftrightarrow$ kann lokal als Potenzreihe geschrieben werden.
(vgl. Def. V.3.5)



•) Für $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ sei

$$R^{(z_0)}_{r_1,r_2} := \{ z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2 \}$$

der durch r_1 und r_2 gegebene offene Kreisring um z_0

<u>Theorem</u> (Laurententwicklung)

Ist $f: R_{r_1,r_2}(z_0) \to \mathbb{C}$ analytisch, so gilt für alle $z \in R_{r_1,r_2}(z_0)$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$$

mit

für beliebige einfache Kurve in $R_{r_1,r_2}(z)$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{(\gamma(t)-z_0)^{n+1}} \gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \frac{f(\gamma_r(t))}{(\gamma_r(t)-z_0)^{n+1}} \cdot r\,dt \quad \left(\gamma_r(t) = r \cdot e^{2\pi i \cdot t}\right).$$

hängt <u>nicht</u> von r <u>ab</u>!

Ist f auf $U_{r_2}(z_0)$ $(= R_{0,r_2}(z_0) \cup \{z_0\})$ analytisch, so gilt $a_n = 0$ für $n < 0$ und die obige Entwicklung reduziert sich auf die <u>Taylorentwicklung</u>.

<u>Korollar</u> (Satz von Liouville) Ist $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch und beschränkt, so ist f konstant

Bew.: Setze $z_0 = 0 \Rightarrow f$ analytisch auf $U_\infty(0)$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \quad \text{mit } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\gamma_r(t))}{\gamma_r(t)^{n+1}} \gamma_r'(t)\, dt$$

Da f beschränkt gilt $|f(\gamma_r(t))| < M$ für $M > 0$

$$\Rightarrow |a_n| = \int_0^1 \frac{\overbrace{|f(\gamma_r(t))|}^{\leq M}}{\underbrace{|\gamma_r(t)|}_{=r}^{n+1}} \cdot r\, dt \leq \frac{M}{r^n}$$

für $\underline{\underline{\text{alle}}}$ $r > 0$ (da $r_z = \infty$)

$$\Rightarrow |a_n| = 0 \quad \text{falls } n \geq 1$$

$$\Rightarrow f(z) = a_0 \quad (\text{insbes. konstant}).$$

∎

V.3 Grundlagen der Spektraltheorie

Um die Lösbarkeit der Gleichung

$$Tx = \lambda x$$

(bzw. das Auffindenden von Eigenwerten) zu studieren führen wir die Folgenden Begriffe ein. Es sei X in diesem Kapitel stets ein Banachraum.

Def. V.3.1 Ist $T: X \supseteq D \to X$ abgeschlossen (wiederholen), so heißt

$$\varrho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda - T \text{ ist bijektiv}\}$$

die Resolventenmenge und $\sigma(T) = \mathbb{K} \setminus \varrho(T)$ das Spektrum von T. Für $\lambda \in \varrho(T)$ bezeichnet

$$R_\lambda(T) := (\lambda - T)^{-1}$$

die Resolvente (von T zum Wert λ).

Bem. V.3.2: a) $R_\lambda(T)$ ist stetig nach dem Satz über die offene Abb. (Th. III.4.4)

b) Oft wird nur gefordert, dass T stetig ist, dies schließt jedoch einige interessante Beispiele aus. Ist $T: X \supseteq D \to X$ jedoch dicht definiert aber nicht abgeschlossen, so gilt

$$\{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda - T \text{ bijektiv und } (\lambda - T)^{-1} \text{ stetig}\} = \emptyset$$

(Übung).

c) Man unterscheidet noch folgende Teilmengen von $\sigma(T)$:

$\sigma_p(T) := \{\lambda : \lambda - T$ nicht injektiv$\}$ (Punktspektrum)

$\sigma_c(T) := \{\lambda : \lambda - T$ injektiv, nicht surjektiv aber mit dichtem Bild$\}$
(stetiges Spektrum)

$\sigma_r(T) := \{\lambda : \lambda - T$ injektiv, Bild nicht dicht$\}$
(residuelles Spektrum oder Restspektrum)

Die Elemente $\lambda \in \sigma_p(T)$ heißen auch <u>Eigenwerte</u> und $x \neq 0$ mit $\lambda x = Tx$ heißt <u>Eigenvektor</u>.

<u>Satz V.3.3</u>: Ist T stetig, so ist $\sigma(T) = \sigma(T')$ und ist X ein Hilbertraum so ist $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.

<u>Bew.</u>:

$S : X \to X$ stetiger Isom. $\Leftrightarrow S' : X' \to X'$ stetiger Isom. (vgl. Satz II.1.14)

Im Hilbertraumfall gilt $((\lambda - T)^{-1})^* = ((\lambda - T)^*)^{-1} = (\overline{\lambda} - T^*)^{-1}$, was die Beh. zeigt (vgl. Def. von $((\lambda - T)^{-1})^*$ für dessen Invertierbarkeit) ▨

<u>Bsp. V.3.4</u> a) Ist $\dim X < \infty$, so ist $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ die Menge der Eigenwerte (also die Nullstellen des char. Polyn.)

b) $X = C[0,1]$, $Tx(s) = \int_0^s x(t)\,dt$

- $\lambda = 0$: T injektiv, kein dichtes Bild $(Tx(0) = 0 \;\forall x \in X) \Rightarrow 0 \in \sigma_r(T)$

- $\lambda \neq 0$: $\lambda - T$ ist bijektiv: für $y \in C^1[0,1]$ ist

$$\lambda x - Tx = y \qquad (*)$$

eindeutig durch

$$x(t) = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t e^{(t-s)/\lambda} \, y(s) \, ds + \frac{1}{\lambda} y(t) \qquad (**)$$

gelöst (Var. der Konstanten für das zu (*) äquivalente AWP

$$x'(t) - \frac{1}{\lambda} x(t) = \frac{1}{\lambda} y'(t) \quad).$$

Da (**) auch für $y \in C[0,1]$ eine Lösung liefert ist $\lambda - T$ bijektiv und $\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$

c) Die Einschränkung T_0 von T auf $\{x \in C[0,1] : x(0) = 0\}$ hat $\sigma(T_0) = \sigma_c(T_0) = \{0\}$ (mit analogem Argument).

d) Betrachte auf $X = C[0,1]$ den abgeschl. Operator

$$d : C[0,1] \supseteq C^1[0,1] \to C[0,1] \qquad dx = x'$$

(d ist in der Tat abgeschlossen:

$$x_n \to x \quad \text{und} \quad x_n' \to y \quad \text{bzgl } \|\cdot\|_\infty$$

$\Rightarrow$ $x_n \to x$ ist Cauchy-Folge bzgl.

$$\|x\|_2 := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty \quad (\text{vgl. Bsp. I.1.8})$$

$\Rightarrow$ $x' = y$ (vgl. Bsp. 1.8)).

Da $(\lambda - d) e^{\lambda t} = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ ist $\sigma(d) = \sigma_p(d) = \mathbb{K}$

(wir werden später sehen dass für stetige Operatoren $\sigma(d)$ immer kompakt ist).

e) Die Einschränkung d_0 von d auf $\{x \in C^1[0,1];\ x(0)=0\}$ hat jedoch $\sigma(d_0) = \emptyset$. In der Tat ist das AWP

$$\underbrace{-x'(t) + \lambda x(t)}_{=((\lambda - d_0)x)(t)} = y(t) \qquad x(0) = 0$$

Für alle $y \in C[0,1]$ eindeutig lösbar (lin. inhom. DGL).

Def. V.3.5: X: normiert, $\emptyset \neq O \subseteq \mathbb{K}$ offen. Dann heißt $f: O \to X$ analytisch, falls f lokal als Potenzreihe geschrieben werden kann, also

$\forall x_0 \in D\ \exists \varepsilon > 0$ und $T_n^{(x_0)} \in X$ für $n \in \mathbb{N}$ so dass

$$\|x_0 - x\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^n \cdot T_n(x_0).$$

Theorem V.3.6 (Satz von Liouville): $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch, beschränkt $\Rightarrow$ f konstant (oder $T_n(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{C}, n > 0$)

Bew.: Funktionentheorie

Theorem V.3.7 (Hauptsatz über das Spektrum) $T: X \supseteq D \to X$ abgeschl. Operator

a) $\rho(T) \subseteq \mathbb{K}$ ist offen

b) $\rho(T) \to L(X)$ $\lambda \mapsto R_\lambda(T)$ ist analytisch

c) $T \in L(X) \Rightarrow \sigma(T)$ ist kompakt (genauer: $|\lambda| \leq \|T\|$ für $\lambda \in \sigma(T)$)

d) $T \in L(X)$, $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow \sigma(T) \neq \emptyset$

(Bem.: Schon für $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}^2)$ ist $\sigma(T) = \emptyset$)

Idee: Neumannsche / geometrische Reihe / Satz von Liouville

Bew.: a) Für $\lambda_0 \in \varrho(T)$ sei $|\lambda - \lambda_0| < \|(\lambda_0 - T)^{-1}\|^{-1}$

$$\Rightarrow \lambda - T = (\lambda_0 - T) + (\lambda - \lambda_0) = (\lambda_0 - T)\left(id - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left((\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}\right)^n$$ konvergiert (da $\|(\lambda_0-\lambda)(\lambda_0-T)^{-1}\| < 1$)

gegen $\left(id - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}\right)^{-1}$ (Aufg. 24). Da $(\lambda_0 - T)$ invertierbar ist also auch $\lambda - T$ invertierbar

b)

$$R_\lambda = (\lambda - T)^{-1} = \left(id - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}\right)^{-1} (\lambda_0 - T)^{-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n \left((\lambda_0 - T)^{-1}\right)^{n+1}$$

c) Für $|\lambda| > \|T\|$ ist

$$(\lambda - T)^{-1} = \lambda^{-1}\left(id - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} T^n \qquad (***)$$

also $\lambda \notin \sigma(T) \Rightarrow \sigma(T)$ beschränkt und abgeschl. (nach a)).

d) Annahme: $\varrho(T) = \mathbb{C}$ ($\Leftrightarrow \sigma(T) = \emptyset$), also so ist für jedes $x' \in L(X)'$ die Fktn $\lambda \mapsto x'(R_\lambda(T))$ analytisch (x' vertauscht mit "$\sum_{n=0}^{\infty}$"). Sie ist auf $|\lambda| \le 2\|T\|$ beschränkt (da stetig) und auf $|\lambda| > 2\|T\|$ beschränkt, da

$$|x'(R_\lambda(T))| \overset{(***)}{\le} \|x'\| \, |\lambda|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{T}{\lambda}\right\|^n \overset{\text{geometr. Reihe} + |\lambda| \le 2\|T\|}{\le} \frac{\|x'\|}{\|T\|}$$

$$\Rightarrow x'(R_\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \, x'\left((T^{-1})^{n+1}\right)$$

mit $x'((T^{-1})^{n+1}) = 0$ für alle $x' \in L(X)'$ und alle $n > 0$

$\overset{\Longrightarrow}{\text{(Hahn-Banach)}}$ $\quad T^{-n} = 0 \quad \forall\, n \geq 2 \quad \lightning$ (0 nicht invertierbar)

$\blacksquare$

Wir werden nun die Abschätzung in Teil c) verschärfen:

Def. V.3.8: T stetig, $r(T) := \inf \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ heißt der Spektralradius von T.

Lemma V.3.9: $r(T)$ ist wohldefiniert. Allgemeiner: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $0 \leq a_{n+m} \leq a_n \cdot a_m$, so konvergiert $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a := \inf \sqrt[n]{a_n}$.

Bew.: Für $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[N]{a_N} \leq a + \varepsilon$ $\Rightarrow a_N^k \leq (a+\varepsilon)^{k\cdot N}$, setze $b_\varepsilon := \max\{a_1, \ldots, a_N\}$.

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \left(a_{kN+r}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(a_N^k \cdot a_r\right)^{\frac{1}{n}} \leq (a+\varepsilon)^{\frac{k\cdot N}{n}} \cdot b_\varepsilon^{\frac{1}{n}}$$

(mit $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq N$ $\Rightarrow n = kN + r \Rightarrow \frac{k\cdot N}{n} = 1 - \frac{r}{n}$)

$$= (a+\varepsilon)(a+\varepsilon)^{-\frac{r}{n}} \cdot b_\varepsilon^{\frac{1}{n}} \underset{\text{für } n \text{ groß genug}}{\leq} a + 2\varepsilon \quad \left(\text{da } b_\varepsilon^{\frac{1}{n}} \to 1\right).$$

Da $a_n := \|T^n\|$ $\quad a_{n+m} = \|T^{n+m}\| = \|T^n \circ T^m\| \leq \|T^n\|\|T^m\| = a_n a_m$ erfüllt ist $r(T)$ wohldef.

Satz V.3.10: Für stetige T gilt a) $|\lambda| \leq r(T)$ für $\lambda \in \sigma(T)$

b) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ existiert $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = r(T)$

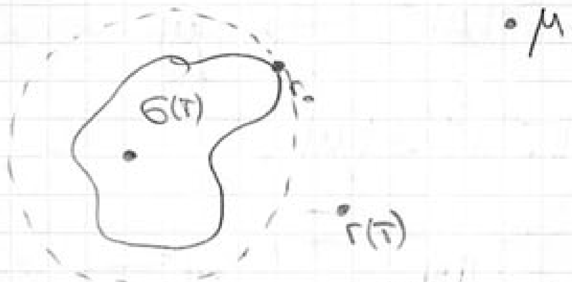
Bew.: a) Wie in V 3.7 c) genügt es zu zeigen dass $\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$ für $|\lambda| > r(T)$ konvergiert

Da
$$\limsup \left\|\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right\|^{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\|T^n\|^{\frac{1}{n}}}{|\lambda|} = \frac{r(T)}{\lambda} < 1$$

konvergiert also $\sum_{n=0}^{\infty} \left\|\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right\|$ (Wurzelkriterium) und somit auch $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$.

b) Setze $r_0 := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} \overset{a)}{\Rightarrow} r_0 \leq r(T)$

Bild:



Sei $|\mu| > r_0$ ⤳ zeige $|\mu| \geq r(T)$ ($\Rightarrow r(T) = r_0$, da μ beliebig)

Für $x' \in L(X)'$ ist

$$K_{r_0,\infty}(0) \to \mathbb{C},\ \lambda \mapsto x'(R_\lambda(T))$$

analytisch und nach V.3.10 c) (Bew.) ist

$$x'(R_\lambda(T)) = x'((\lambda - T)^{-1}) = \lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n} x'(T) \quad \text{für } |\lambda| > r(T)$$

Laurent-Entwicklung $\Longrightarrow$ (da r in der Berechnung von a_n beliebig war)

$$x'(R_\lambda(T)) = \lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n} x'(T^n) \quad \text{auch für } |\lambda| > r_0$$

(insbesondere für $|\mu|$)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x'\left(\frac{T^n}{\mu^{n+1}}\right) = 0, \text{ da } \sum_{n=0}^{\infty} x'\left(\frac{T^n}{\mu^{n+1}}\right) \text{ konvergiert}$$

$$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|x'\left(\frac{T^n}{\mu^{n+1}}\right)\right| < \infty \quad \forall x' \in L(X)'$$

$$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \overset{\circ}{i}\, \tfrac{T^n}{\mu^{n+1}} (x') \right| < \infty \quad \forall x\in L(X)' \quad \Big(\overset{\circ}{i} : L(X) \hookrightarrow L(X)'' \text{ isometrische Einbettung} \Big)$$

Banach-Steinhaus

$$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \overset{\circ}{i}\, \tfrac{T^n}{\mu^{n+1}} \right\| < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \frac{T^n}{\mu^{n+1}} \right\| < \infty$$

$$\Rightarrow \exists\, K>0 \text{ mit } \|T^n\| \le K\, |\mu|^{n+1}$$

$$\Rightarrow \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \le K^{\frac{1}{n}}\, |\mu|^{\frac{n+1}{n}} \longrightarrow |\mu|$$

$$\Rightarrow r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \le |\mu| .$$ ▨

<u>Satz V.3.11</u> Ist X ein Hilbertraum und T normal (also $TT^* = T^*T$), so ist $r(T) = \|T\|$.

<u>Bew.:</u> T normal $\Rightarrow \|T\|^2 = \|T^2\|$, da nach Satz V.2.3 $\|S\|^2 = \|SS^*\|$, also

$$\|T^2\|^2 = \|T^2 (T^2)^*\| = \|TTT^*T^*\| = \|TT^*TT^*\| = \|(TT^*)^2\| = \|TT^*\|^2 = (\|T\|^2)^2$$

$$\Rightarrow \|T\|^{2^k} = \|T^{2^k}\|$$

$$\Rightarrow r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k\to\infty} \|T^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|T\| .$$ ▨

V.4 Das Spektrum kompakter Operatoren

Auch hier seien X und Y Banachräume

Wir werden im Folgenden den nächsten Satz benötigen

Satz V.4.1 (Satz von Schauder): Es gilt

$$T \in L(X,Y) \text{ kompakt} \Leftrightarrow T' \in L(Y',X') \text{ kompakt.}$$

Bew.:

"$\Rightarrow$" Sei $(y_n')_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Y' mit $\|y_n'\| \leq 1$.

Setze $K := \overline{T(B_X)}$ (ist kompakt, insbesondere beschränkt nach Annahme)

betrachte $\xi_n := y_n'\big|_K \in C(K)$.

$\Rightarrow$ $\cdot)$ $\xi_n(y) = y_n'(y) \leq \|y_n'\| \cdot \|y\| \leq \|y\| < M$ (ξ_n beschränkt)

$\cdot)$ $\xi_n(y_1) - \xi_n(y_2) = y_n'(y_1 - y_2) \leq \|y_1 - y_2\|$ (ξ_n gleichgradig stetig)

(Arzela Ascoli)

$\Rightarrow$ $\exists$ konvergente Teilfolge $(\xi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

Da

$$\|T'y_{n_k}' - T'y_{n_l}'\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|(T'y_{n_k}' - T'y_{n_l}')(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|(y_{n_k}' - y_{n_l}')(\underbrace{Tx}_{\in K})\|$$

$$\leq \sup_{y\in K} \|(y_{n_k}' - y_{n_l}')(y)\| = \|\xi_{n_k} - \xi_{n_l}\|_\infty$$

ist $(T'y_{n_k}')_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(T'y_n')_{n\in\mathbb{N}}$, dessen Existenz zu zeigen war.

"$\Leftarrow$" Aus "$\Rightarrow$" folgt $T'' \in K(X'', Y'')$, also auch

$$L_Y \circ T = T'' \circ L_X \in K(X, Y'') \qquad (L_X : X \to X'' \text{ kan. isometr. Einbettung})$$

Da L_Y eine Isometrie ist gilt

$$\overline{L_Y(T(B_X))} \text{ kompakt} \Leftrightarrow \overline{T(B_X)} \text{ kompakt}$$

also ist auch T kompakt. ▨

Vor dem Spektralsatz kommen nun ein paar vorbereitende Lemmas:

<u>Lemma</u> $\underline{V}$. 4.2 Für $X \in L(X,Y)$ gilt

$$\text{im}(T) \subseteq Y \text{ abgeschlossen} \Rightarrow \text{im}(T') = \ker(T)^{\perp}$$

(in Banachräumen ist für $U \subseteq X$ $U^{\perp}$ def. als $\{x' : x'(u) = 0 \ \forall u \in U\} \subseteq X'$).

<u>Bew.</u> •) $\text{im}(T') = \{y' \circ T : y' \in Y'\} \overset{\uparrow}{\subseteq} \{x' \in X' : x'(v) = 0 \ \forall v \in \ker(T)\} = \ker(T)^{\perp}$.

da $y' \circ T(v) = y'(0) = 0$ falls $v \in \ker(T)$

•) Ist $x' \in \ker(T)^{\perp}$, so ist $\tilde{x} : X/_{\ker(T)} \to \mathbb{K}$ stetig und

$$z' : \text{im}(T) \to \mathbb{K} \quad z'(y) = \tilde{x}(\tilde{T}^{-1}(y)) \quad \text{stetig, wobei}$$

$\tilde{T}^{-1} : \text{im}(T) \to X/_{\ker(T)}$ das inverse der kan. Faktorisierung von T ist (ist stetig nach dem Satz von der offenen Abb., da $\text{im}(T)$ <u>abgeschlossen</u> ist und somit ein Banachraum).

Für eine stetige Fortsetzung $y' : Y \to \mathbb{K}$ von z' gilt $x' = T'y'$:

$$x'(x) = \tilde{x}([x]) = z'(Tx) = y'(Tx) = (T'y')(x) \quad \forall x \in X$$

also $\ker(T)^{\perp} \subseteq \text{im}(T')$. $\boxed{\tilde{T}[x]}$ ▨

<u>Bem.</u> $\underline{V}$.4.3 Es gilt sogar (vgl. Werner, Theorem IV.5.1):

$\text{im}(T)$ abgeschlossen $\Leftrightarrow \text{im}(T') = \ker(T)^{\perp} \Leftrightarrow \text{im}(T')$ abgeschl. $\Leftrightarrow \text{im}(T) = \ker(T')_{\perp}$

(im Hilbertraum ⇔ auch $\text{im}(T^*) = \ker(T)^{\perp}$)

Lemma V.4.4 Ist $T \in L(X)$ kompakt und $\lambda \neq 0$, so hat

$Q_\lambda := \lambda - T$ abgeschlossenes Bild.

Bew.: Sei $\tilde{X} := X/_{\ker(Q_\lambda)}$ und $\tilde{Q}_\lambda : \tilde{X} \to Y$ die kan. Faktorisierung.

·) Es ex. $\gamma > 0$ so dass (*) $\|Q_\lambda x\| \geq \gamma \|\tilde{x}\| \; (= \gamma \cdot d(\ker Q_\lambda, x)) \; \forall x \in X$.

Falls nicht gäbe es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\|\tilde{x}_n\| = 1$ und $\|Q_\lambda x_n\| \to 0$.

$(\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_n \text{ mit } \|x_n\| + \varepsilon \leq \|\tilde{x}_n\|)$

Sei o.B.d.A $1 \leq \|x_n\| \leq 2$. Da T kompakt ex. eine konvergente Teilfolge $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $Tx_{n_k} \to x_0$

$$\Rightarrow \lambda \cdot x_{n_k} = (Q_\lambda + T)\, x_{n_k} \to x_0 \quad (\text{da } Q_\lambda x_{n_k} \to 0).$$

$$\Rightarrow \|\tilde{x}_0\| = \lim_{k\to\infty} \|\lambda x_{n_k}\| = |\lambda| > 0$$

Aber $Q_\lambda x_0 = \lambda \cdot \lim_{k\to\infty} Q_\lambda x_{n_k} = 0$, also $x_0 \in \ker(Q_\lambda)$

$\Rightarrow \|\tilde{x}_0\| = 0$ ↯

·) Sei nun $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\operatorname{im}(Q_\lambda)$, die in X gegen ein y konv.

Für die Folge $\tilde{x}_n := \tilde{Q}_\lambda^{-1} y_n$ gilt nach (*)

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\| \leq \gamma^{-1} \|Q_\lambda x_n - Q_\lambda x_m\| = \gamma^{-1} \|y_n - y_m\|$$

$\Rightarrow (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $X/\ker(Q_\lambda)$. Da $\ker(Q_\lambda)$ abgeschl. ist konvergiert $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $\tilde{x}$ mit $\tilde{T}\tilde{x} = y$, also $y \in \operatorname{im}(\tilde{T}) = \operatorname{im}(T)$. ▨

Theorem V. 4.5 (Spektralsatz für kompakte Operatoren)

Ist $T \in L(X)$ kompakt, so ist für alle $\delta > 0$ die Menge $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \geq \delta\}$ endlich. Insbesondere ist $\sigma(T)$ höchstens abzählbar und hat höchstens 0 als Häufungspunkt.

<u>Bew.:</u> Für $\lambda \neq 0$ hat $Q_\lambda := \lambda - T$ stets abgeschlossenes Bild (voriges Lemma). Damit gilt

$$\operatorname{im}(Q_\lambda)^\perp = \ker(Q_\lambda') \qquad (Q_\lambda' = \lambda - T')$$

und jedes $\lambda \in \sigma(T) = \sigma(T')$ ist ein Eigenwert von entweder T oder von T'. Ist also

$$\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \geq \delta\}$$

unendlich, so haben entweder S oder S' unendlich viele Eigenwerte. Da nach Satz V.4.1 S' ebenfalls kompakt ist genügt es also die Aussage

$$S \text{ hat unendlich viele Eigenwerte } \neq 0$$

zum Widerspruch zu führen.

Seien $x_n \in X$ (o.B.d.A. $\|x_n\| = 1$) Eigenvektoren zu den (paarweise verschiedenen) Eigenwerten $0 \neq \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Setze $V_n := \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Da die x_n lin. unabhängig sind gilt $V_n / V_{n-1} \cong \mathbb{K}$. Wähle $\xi_n \in V_n / V_{n-1}$ mit $\|\xi_n\|_{V_n/V_{n-1}} = 1$ und einen Repräsentanten $y_n \in V_n$ mit $1 \leq \|y_n\| \leq 2$.

Da T kompakt ist ex. konv. Teilfolge $(Ty_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Sei $n > m$. Dann gilt

- $\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_n y_n - \underbrace{(\lambda_n y_n - Ty_n + Ty_m)}_{\in V_n}\|$
- $y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad y_m = \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i \quad$ für $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$
- $Ty_m = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \cdot \lambda_i x_i \in V_m \subseteq V_{n-1}$

$\Rightarrow \lambda_n y_n - Ty_n = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_n \cdot \alpha_i - \lambda_i \cdot \alpha_i) x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_n - \lambda_i) x_i \in V_{n-1}$

$\Rightarrow \|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_n \cdot y_n - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_n - \lambda_i) x_i + Ty_m\right)}_{\in V_{n-1}}\| \leq \|[\lambda_n \cdot y_n]\|_{V_{n-1}}$

$= |\lambda_n| \geq \delta$.

Da $(Ty_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jedoch konvergiert ist dies ein Widerspruch. ▨

Bem. V.4.6 Ist $\dim X = \infty$, so gilt $0 \in \sigma(T)$, da T als kompakter Operator nicht (stetig) invertierbar sein kann.

Bsp. V.4.7 Ist $X = C[0,1]$, $Tx(s) = \int_0^s x(t)\,dt$, so ist $\sigma(T) = \{0\}$, wie in Bsp. V.3.4

Hier gibt der Spektralsatz also keinen weiteren Aufschluss über T.

Wir betrachten nun noch eine spezielle Klasse unbeschränkter (abgeschlossener) Operatoren

Satz V.4.8 Für $T: X \supseteq D \to X$ abgeschl. Operator und $\lambda \in \varrho(T)$ sind äquiv.:

a) Die Einbettung $i: (D, \|\cdot\|_T) \to X$ ist kompakt

b) Die Resolvente $R_\lambda(T): X \to X$ ist kompakt

Bew.: a) $\Rightarrow$ b): Es ist $R_\lambda(T): X \to (D, \|\cdot\|_T)$ stetig, da bijektiv und X, $(D, \|\cdot\|_T)$ Banachräume sind (Lemma III.4.3).

$\Rightarrow$ $i \circ R_\lambda(T): X \to X$ ist kompakt (Satz V.1.3)

b) $\Rightarrow$ a) $\mu - T: (D, \|\cdot\|_T) \to X$ ist bijektiv, also stetig

$\Rightarrow$ $i = R_\lambda(T) \circ (\mu - T): (D, \|\cdot\|_T) \to X$ ist kompakt. ∎

Def. V.4.9: Ist $T: X \supseteq D \to X$ abgeschl., $\varrho(T) \neq \emptyset$ und $i: (D, \|\cdot\|_T) \to X$ kompakt, so sagt man "T hat kompakte Resolvente".

Lemma V.4.10. $T \in L(X)$ hat kompakte Resolvente (mit $D = X$), so ist $\dim X < \infty$.

Bew.: $R_\lambda(T)$ stetig invertierbar & kompakt $\Rightarrow$ $\dim X < \infty$. ∎

Theorem V.4.11 (Spektralsatz für Operatoren mit kompakter Resolv.)

$T: X \supseteq D \to X$ abgeschl. mit kompakter Resolvente

$\Rightarrow$ $\sigma(T)$ ist höchstens abzählbar und hat keinen Häufungspunkt

Bew.: Es sei $\mu \in \varrho(T) \Rightarrow R_\mu(T)$ kompakt.

$$\lambda - T = (\mu - T)(\lambda - \mu) = (id - (\mu-\lambda) R_\mu(T))(\mu - T)$$

und für $\lambda \neq \mu$ ergibt sich

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu-\lambda} \in \sigma(R_\mu(T))$$

oder

$$z \in \sigma(R_\mu(T)) \Leftrightarrow \mu - \frac{1}{z} \in \sigma(T)$$

Da $\sigma(R_\mu(T))$ nur in 0 einen Häufungspunkt besitzt hat also $\sigma(T)$ keinen Häufungspunkt.

$\blacksquare$

Bsp. V.4.11 a) $d: C^0[0,1] \supseteq C^1[0,1] \to C^0[0,1]$ $dx = x'$.
Zwar ist $(C^1[0,1], \|\circ\|_d) \hookrightarrow C^0[0,1]$ kompakt (Aufg. 36), aber $\varrho(d) = \emptyset$ und somit hat d keine kompakte Resolvente.

b) $d_0: C^0[0,1] \supseteq \{x \in C^1[0,1] : x(0) = 0\} \to C^0[0,1]$ hat kompakte Resolvente, da $\varrho(d_0) = \mathbb{K} \neq \emptyset$. Allerdings ist hier auch $\sigma(d_0) = \emptyset$.

c) Übung: Operatoren mit beliebigen Spektren

V.5 Spektralzerlegung normaler Operatoren

Im Folgenden seien H und G stets Hilberträume

Ziel: Diagonalisierbarkeit von Operatoren

Wir werden zeigen, dass kompakte normale Operatoren immer die folgende Gestalt haben:

Satz V.5.1 $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$: ONS in H, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$: ONS in G
$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Nullfolge in $\mathbb{K}$

$$\Rightarrow \quad Tx := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot \langle x, e_n \rangle \cdot f_n \quad \text{(absolute Konvergenz)}$$

definiert einen kompakten Operator in $L(H,G)$ und es gilt

$$T^* y = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\lambda_n} \cdot \langle y, f_n \rangle e_n \qquad (*)$$

<u>Bew:</u> Für $\alpha_k := \sup\{|\lambda_n| : n \geq k\}$ gilt $\alpha_k \to 0$.

Es ist $T_k x := \sum_{n=0}^{k} \lambda_n \langle x, e_n \rangle f_f$ ein Operator mit endlichdim. Bild, also kompakt. Ferner gilt

$$\|Tx - T_k x\|^2 = \|\sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle f_n\| = \sum_{n=k+1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, e_n \rangle|^2$$

$$\leq \alpha_{k+1}^2 \cdot \|x\|^2 \leq \alpha_{k+1}^2 \quad \forall x \in H \text{ mit } \|x\| \leq 1$$

$\Rightarrow \|T - T_k\| \to 0$ und T ist kompakt (Satz V.1.3).

Für $x \in H$, $y \in G$ gilt

$$\langle Tx, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle \langle f_n, y \rangle$$

$$= \langle x, \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\lambda_n} \overline{\langle f_n, y \rangle} e_n \rangle \overset{!}{=} \langle x, T^* y \rangle$$

und somit (*) nach Lemma V.2.2 b). ∎

<u>Satz V.5.2</u> $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$: ONS von H, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Nullfolge

$$\Rightarrow Tx := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

ist kompakt und normal. T ist selbstadjungiert $\Leftrightarrow \lambda_n \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Ferner gilt

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$$

und jedes λ_n ist ein Eigenwert mit

$$\ker(\lambda_n - T) = \operatorname{span}\{e_m : \lambda_m = \lambda_n\} \quad \text{falls } \lambda_n \neq 0.$$

<u>Bew.:</u> Aus Satz V.5.1 folgt T kompakt,

$$TT^* x = T\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{\lambda_n} \langle x, e_n \rangle e_n\Big) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m \langle \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\lambda_n} \langle x, e_n \rangle \underbrace{e_n, e_m \rangle}_{=\delta_{n,m}} e_m$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \overline{\lambda_n} \langle x, e_n \rangle e_n = \ldots = T^* T x$$

und $T = T^* \Leftrightarrow$ alle λ_n reell. Offensichtlich gilt

$$T e_n = \lambda_n \cdot e_n \Rightarrow \sigma(T) \supseteq \{0\} \cup \{\lambda_n : \lambda_n \in \mathbb{N}\}$$

(da $0 \in \sigma(T)$ für T kompakt). $\quad \ker(\lambda_n - T) \supseteq \operatorname{span}\{e_m : \lambda_m = \lambda_n\}$

•) Sei P die orthogonale Proj. auf $E := \operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp}$.
Für $\mu \in \mathbb{C}$ gilt

$$(\mu - T)x = \mu(x - Px) - Tx + \mu Px$$

$$\underset{\text{da } \langle Px, e_n \rangle = 0}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda_n) \langle x, e_n \rangle e_n + \mu Px$$

$$\Rightarrow \|(\mu - T)x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\mu - \lambda_n|^2 |\langle x, e_n \rangle|^2 + \mu^2 \|Px\|^2 \qquad (*)$$

Ist $\lambda_n \neq 0$, so gilt

$$(\lambda_n - T)x = 0 \Rightarrow \|Px\|^2 = 0 \text{ und } \langle x, e_m \rangle = 0$$
für $\lambda_m \neq \lambda_n$.

$$\Rightarrow x \in \operatorname{span}\{x_m : \lambda_m = \lambda_n\}$$

$$\Rightarrow \ker(\lambda_n - T) \subseteq \quad -\text{ll}-$$

•) Für $\mu \in \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\})$ ex. $\varepsilon > 0$ mit $|\mu| \geq \varepsilon$ und $|\mu - \lambda_n| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (ansonsten wäre μ ein Häufungspunkt von $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Aus $(*)$ folgt dann

$$\|(\mu - T)x\|^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^2 |\langle x, e_n \rangle|^2 + \varepsilon^2 \|Px\|^2$$

$$\underset{\text{Satz V.4.10}}{=} \varepsilon^2 \|x - Px\|^2 + \varepsilon^2 \|Px\|^2 = \varepsilon^2 \|x\|$$

$\Rightarrow \mu - T$ injektiv und hat abgeschl. Bild (Lemma V.4.3)

analog: $\overline{\mu} - T^*$ injektiv und hat abgeschl. Bild (+ Satz V.4.1)

$$\Rightarrow \operatorname{im}(\mu - T) \underset{\text{Lem. V.4.2}}{=} \ker(\overline{\mu} - T^*)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H \Rightarrow \mu \notin \sigma(T). \blacksquare$$

Wir zeigen nun, dass sich jeder normale kompakte Operator als

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

schreiben lässt.

Satz V.5.3 Ist $T \in L(H)$ normal und kompakt, so ist jeder Spektralwert $\neq 0$ auch ein Eigenwert. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ex. ein EW λ mit $|\lambda| = \|T\|$.

Bew.: Nach Satz V.3.11 und Satz V.3.10 c) gilt

$$\|T\| = r(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Es genügt also, die erste Aussage zu zeigen.
Für $\lambda \in \sigma(T)$ gilt:

- $\dim(\ker(\lambda - T)) < \infty$: hierauf ist $id = \frac{T}{\lambda}$ kompakt, was nur im Fall endlicher Dimension sein kann
- $\dim(\ker(\bar{\lambda} - T^*)) < \infty$: ebenso, da T^* komp. und $\bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$.
- $\dim(\ker(\lambda - T)) = \dim(\ker(\bar{\lambda} - T^*))$: Lemma V.2.12 (da T normal)

Da

$$\ker(\bar{\lambda} - T^*) = \operatorname{im}(\lambda - T)^{\perp} \quad \text{(Lemma V.4.2)}$$

gilt also

$$\ker(\lambda - T) \neq 0 \iff \operatorname{im}(\lambda - T) \neq H \qquad (**)$$

Also ist jeder Spektralwert ein Eigenwert. ∎

Bem. V.5.4 Die Äquivalenz (**) wird auch als Fredholmsche Alternative bezeichnet. Sie gilt allgemeiner für Fredholmoperatoren mit Index 0.

Theorem V.5.5 (Spektralzerlegung) Ist $\dim H = \infty$ ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$)
und $T \in L(H)$ kompakt und normal. Dann ex.

- eine monoton fallende Nullfolge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- ein ONS $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von H

so dass

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n \quad \forall x \in H$$

Bew.: Nach Satz V.5.3 ex. $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $e_0 \in H$ mit $|\lambda| = \|T\|$
und $Te_0 = \lambda_0 e_0$

Setze $H_1 := \{e_0\}^{\perp}$. Für $x \in H_1$ gelten

$\ker(\lambda_0 - T) = \ker(\overline{\lambda_0} - T^*)$

- $\langle Tx, e_0\rangle = \langle x, T^* e_0\rangle = \lambda_0 \langle x, e_0\rangle = 0$
- $\langle T^* x, e_0\rangle = \langle x, Te_0\rangle = \overline{\lambda_0} \langle x, e_0\rangle = 0$

$\Rightarrow Tx \in H_1$ und $T^* x \in H_1$

$\Rightarrow T_1 := T|_{H_1}$ ist kompakt und normal

Wende selbes Argument auf T_1 an usw induktiv ergibt sich eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein ONS $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lambda_n \geq \lambda_{n+1} \qquad Te_n = \lambda_n \cdot e_n$$

Da T kompakt ist hat $(Te_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konv. Teilfolge $(Te_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$
und es gilt

$$|\lambda_{n_{k+1}}|^2 + |\lambda_{n_k}|^2 = \|Se_{n_{k+1}} - Se_{n_k}\|^2 \to 0$$

und aus der Monotonie folgt $\lambda_n \to 0$.

Für $x \in H$ setze $x_k := x - \sum_{n=0}^{k} \langle x, e_n \rangle e_n$

$$\Rightarrow \left\| Tx - \sum_{n=0}^{k-1} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \right\| = \|Tx_n\| \leq \|T_n\| \, \|x_n\|$$

$$= |\lambda_n| \, \|x_n\| \leq |\lambda_n| \, \|x\|$$

Also konvergiert $\left(x \mapsto \sum_{n=0}^{k-1} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Operatornorm gegen T.

$\blacksquare$