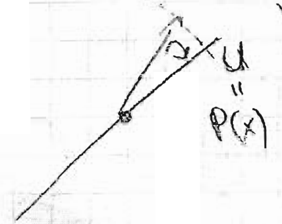
IV Hilberträume

IV.1 : Projektionen auf Banachräumen

Def. IV.1.1 X: Vektorraum $P: X \to X$ linear heißt Projektion falls $P^2 = P$.

(z.B. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

)

Erinnerung:

$$\text{Projektionen von } X \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \text{Zerlegungen } X \cong U \oplus V$$

(alles rein algebraisch).

Lemma IV.1.2: X: normiert, $P: X \to X$ stetige Projektion $\Rightarrow$

a) Entweder $P = 0$ oder $\|P\| \geq 1$

b) $\ker(P)$ und $\operatorname{im}(P)$ sind abgeschlossen

c) $X \cong \ker(P) \oplus \operatorname{ran}(P)$ (stetiger Isomorphismus)

Bew.: a) $\|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|^2 \Rightarrow \|P\| = 0$ oder $\|P\| \geq 1$

b) $\ker(P) = P^{-1}(\{0\})$, $\operatorname{im}(P) = \ker(\mathrm{id}_X - P)$

c) $x = \underbrace{P(x)}_{\in \operatorname{im}(P)} + \underbrace{(\mathrm{id}_X - P)(x)}_{\in \ker(P)}$ ∎

Bsp. IV.1.3 a) (X, μ): Maßraum, $U \subseteq X$ $\quad 1 \leq p \leq \infty$

$\rightsquigarrow P_U: L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu) \quad [f] \mapsto [\chi_U \cdot f] \quad \left(\chi_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right)$

ist Projektion mit $\|P_U\| = 1$ (falls $U \neq \emptyset$), warum?

b) Selbiges gilt für stetige oder beschränkte Fktn.

Satz IV.1.4 X: normiert, $U \subseteq X$ endlichdim.

$\Rightarrow \exists\, P: X \to X$ stetige Projektion mit $P(X) = U$, $\|P\| \leq \dim U$

Bew.: $\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis von U mit dualer Basis $\{b_1', \dots, b_n'\}$.

$\rightsquigarrow \exists$ stetige normgleiche Fortsetzungen $b_i' \in X'$.

$\Rightarrow P(x) := \sum_{i=1}^n b_i'(x) \cdot b_i$ hat die gewünschten Eigenschaften. ∎

Satz IV.1.5: X: Banachraum, $U, V \subseteq X$ abgeschl. mit

$$X \cong U + V, \quad U \cap V = \{0\}$$

$\Rightarrow$ a) $X \cong U \oplus V$ als Banachräume (stetiger Isomorphismus)

b) $\exists\, P: X \to X$ stetige Proj mit $P(X) = U$

c) $V \cong X/U$

a) : $U \oplus V$ ist Banachraum nach Lemma I.4.15. und

$U \oplus V \to X$ stetig & bijektiv $\Rightarrow$ stetiger Isom. nach Satz über offene Abb.

b) : a) $\Rightarrow$ $\|u\| + \|v\| \leq M \|u+v\|$ $\forall u \in U, v \in V$

$\Rightarrow$ $\begin{matrix} x = & u + v & \mapsto u \\ \cap & \cap \quad \cap & \cap \\ X & U \quad V & U \end{matrix}$ ist wohldef. Projektion und stetig

c) $V \hookrightarrow X/U$ ist bijektiv & stetig $\Rightarrow$ stetiger Isom. nach Satz über offene Abb. $\blacksquare$

__Def. IV.1.6__ X: Banachraum. $U \leq X$ abgeschl. heißt komplementiert falls $V \leq X$ abgeschl. existiert mit $X \cong U \oplus V$.

__Satz IV.1.7__ $c_0 \leq \ell^\infty$ ist abgeschlossen aber nicht komplementiert.

Zunächst ein technisches Lemma IV.1.8: $\exists I$ überabzählbar und $N_i \subseteq \mathbb{N}$ mit $|N_i| = \infty$ $\forall i \in I$ so daß $|N_i \cap N_j| < \infty$ $\forall i \neq j$.

__Bew.:__ Sei $\{q_1, q_2, \dots\}$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q}$ und $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Zu $i \in I$ wähle $(x_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathbb{Q}$-Folge mit $x_n^{(i)} \to i$ und setze

$$N_i := \{ n \in \mathbb{N} : q_n = x_k^{(i)} \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \}$$

(wäre $|N_i \cap N_j| = \infty$, so gäbe es $x_k^{(i)} = x_{k'}^{(j)}$ mit k und k' beliebig groß $\Rightarrow$ gäbe Teilfolgen $(x_k^{(i)})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(x_{k'}^{(j)})_{k' \in \mathbb{N}}$ mit gleichem Limes $\Rightarrow i = j$). $\blacksquare$

Bew. (von Satz IV.17):

Annahme: c_0 komplementiert $\Rightarrow \ell^\infty/c_0 \cong V$ mit $V \leq \ell^\infty$ abgeschl.

$\underbrace{\exists\ v_n' \in V'}_{(\text{z.B. } v_n'((s_k)_{k\in\mathbb{N}}) := s_n)}$ mit $v_n'(v) = v_n'(w)\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow v = w$, also

$\exists\ x_n' \in X'$ $(X := \ell^\infty/c_0)$ mit $x_n'(x) = x_n'(y)\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = y$. (*)

Dies wird zum Widerspruch geführt:

•) Wähle $N_i \subseteq \mathbb{N}$ wie in Lemma IV.16 und setze

$$x_i := [\chi_{N_i}] \quad (\chi_{N_i} = \text{char. Funktion})$$

Da kein χ_{N_i} eine Nullfolge ist gilt $x_i \neq 0$.

•) Für $x' \in X'$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$I^{(n)}_{x'} := \left\{ i \in I : |x'(x_i)| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

endlich: Sind $i_1, \dots, i_r \in I^{(n)}_{x'}$ verschieden, setze

$$\alpha_k := \frac{|x'(x_{i_k})|}{x'(x_{i_k})} \qquad (\Rightarrow |\alpha_k| = 1)$$

Da $|N_i \cap N_j| < \infty$ gilt $\chi_{N_{i_k}}(s) = 1 \Rightarrow \chi_{N_{i_\ell}}(s) = 0$ für $\ell \neq k$, s genügend groß

$$\Rightarrow \left\| \sum_{k=1}^r \alpha_k \cdot x_{i_k} \right\| = \limsup \left| \sum_{k=1}^r \alpha_k \cdot x_{i_k} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \cdot r \leq \sum_{k=1}^r |x'(x_{i_k})| = x'\left(\sum_{k=1}^r \alpha_k \cdot x_{i_k} \right) \leq \|x'\|$$

$$\Rightarrow r \leq \|x'\| \cdot n$$

•) $\forall x' \in X'$ ist $I_{x'} := \{ i \in I : x'(x_i) \neq 0 \} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I^{(n)}_{x'} = \{ i \in I : x'(x_i) \geq \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N} \}$ abzählbar.

•) Für $x_n' \in X$ (von oben) gilt also

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{x_n'} = \{ i \in I : x_n'(x_i) \neq 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \}$$ ist abzählbar

$\Rightarrow$ Es existieren (sogar überabzählbar viele) $i_0 \in I$ mit $x_n'(x_{i_0}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $x_{i_0} \neq 0$ ist dies ein Widerspruch zu (*). ∎

IV.2 Hilberträume

Die folgende Klasse von Räumen sind genau die Banachräume, die den Defekt aus Satz IV.1.7 nicht haben:

Def. IV.2.1: X: $\mathbb{K}$-Vektorraum $\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt falls

a) $\langle \cdot , y \rangle : X \to \mathbb{K}$ ist linear $\forall y \in X$

b) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ $\forall x,y \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \langle x, \cdot \rangle : X \to \mathbb{K}$ ist anti-linear

c) $\langle x, x \rangle \geq 0$ $\forall x \in X$

d) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Für $A \subseteq X$ heißt $A^{\perp} := \{ x \in X : \langle x, a \rangle = 0 \; \forall a \in A \}$ das orthogonale Komplement von A (x und y heißen orthogonal falls $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow: x \perp y$)

Satz IV.2.2 (Cauchy-Schwarz)

$$| \langle x, y \rangle |^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

(mit Gleichheit genau dann wenn x und y lin. abhängig).

Bew.: Für $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig gilt

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \lambda \overline{\langle x, y \rangle} + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 \langle x, y \rangle$$

Gleichheit gdw $0 = x + \lambda y$ mit $\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ gilt

Für $y \neq 0$ setze $\lambda := -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$

$$\Rightarrow 0 \leq \langle x,x\rangle - \frac{1}{\langle y,y\rangle}\left(|\langle x,y\rangle|^2 + |\langle x,y\rangle|^2\right) + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} \quad \blacksquare$$

Lemma IV.2.3 $x \mapsto \|x\| := \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ definiert eine Norm auf X.

Bew.: Dreiecksungl. (Rest klar):

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2 \quad \blacksquare$$

Def. IV.2.4 $(X, \|\cdot\|)$ normiert heißt Prähilbertraum, wenn ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ mit $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$ existiert.
Ist X vollständig, so heißt $(X, \|\cdot\|)$ auch Hilbertraum.

Bem IV.2.5: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist eindeutig durch $\|\cdot\|$ bestimmt (Übung):

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{R})$$

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right) \quad (\mathbb{K} = \mathbb{C}).$$

Lemma IV.2.6: X: Prähilbertraum, $U \subseteq X$ beliebig. Dann gilt:

$$\operatorname{span} U \text{ dicht} \Rightarrow U^\perp = \{0\}$$

Bew.: $U^\perp = \operatorname{span} U^\perp \Rightarrow$ o.B.d.A: $\operatorname{span} U = U$.

$\cdot)$ U dicht, $x_0 \in U^\perp \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists v_n$ mit $\|v_n\| \leq \frac{1}{n}$, $x_0 + v_n \in U$

$$\Rightarrow \langle x_0, x_0\rangle = \langle x_0, x_0 + \lim v_n\rangle = \lim \langle x_0, x_0 + v_n\rangle = 0 \Rightarrow x_0 = 0.$$

$\blacksquare$

Satz IV.2.7 X: normiert

a) X ist Prähilbertraum gdw $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (Parallelogrammgl.)

b) X ist Prähilbertraum wenn dies für alle 2-dim. Unterräume gilt.

c) Unterräume von Prähilberträumen sind Prähilberträume

d) Die Vervollständigung (Satz II.1.14) eines Prähilbertr. ist ein Hilbertraum.

Bew: a): Übung. a) ⇒ b) & c) klar.

d) Die Parallelogrammgl. überträgt sich auf die Vervollständigung (Dichtheit, Stetigkeit). ■

Bsp. IV.2.8: $L^2(X,\mu)$ ist Hilbertraum:

$\langle x,y\rangle := \int_X x(s)\overline{y(s)}\,ds$ erfüllt Skalarprodukteigenschaft

und $\|x\|_2^2 = \int_X |x(s)|^2 ds = \int_X x(s)\overline{x(s)}\,ds = \langle x,x\rangle$.

IV.3 Orthogonalität

(Im Folgenden sei immer H ein Hilbertraum)

Lemma IV.3.1 a) $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\| + \|y\|^2$

b) Für $A \subseteq H$ ist $A^\perp$ ein abgeschl. UVR.

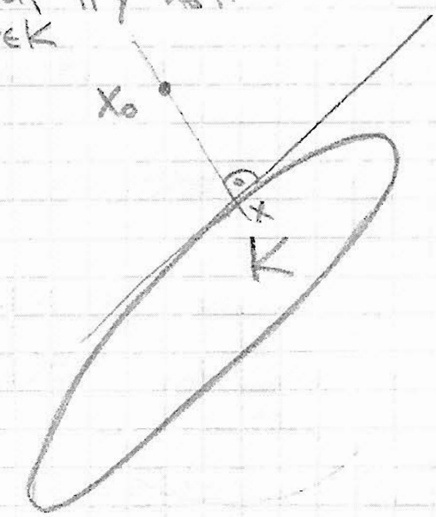
c) $A \subseteq A^{\perp\perp}$ und $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$

d) $A^\perp = \left(\overline{\operatorname{span} A}\right)^\perp$

Bew.: Klar / Übung

Satz IV.32 (Projektionssatz) $K \subseteq H$ abgeschl., konvex, $x_0 \in H$

$\Rightarrow$ ex. genau ein $x \in K$ mit $\|x - x_0\| = \inf_{y \in K} \|y - x_0\|$



Bew.: $x_0 \in K$: Aussage trivial

$x_0 \notin K$ (o.B.d.A. $x_0 = 0$). Existenz:

$d := \inf_{y \in K} \|y\|$

$\Rightarrow \exists$ Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\|y_n\| \to d$

Parallelogrammgl.: $\left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{y_n - y_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2 \right) \to d^2$

$\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in K \Rightarrow \left\| \frac{1}{2}(y_n + y_m) \right\|^2 \geq d^2$

$\Rightarrow \left\| \frac{y_n - y_m}{2} \right\| \to 0$ für $n \to \infty$ und $m \to \infty$

$\Rightarrow (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge

$\Rightarrow y_n \to x \in K$, da K abgeschl., H vollständig

Da $\|y_n\| \to d$ gilt außerdem $\|x\| = d$.

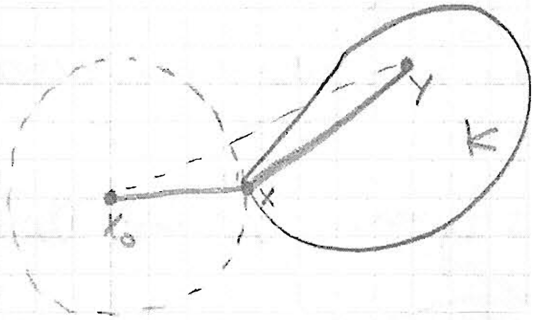
Eindeutigkeit: $\|x\| = \|\tilde{x}\| = d$

$\Rightarrow \left\| \frac{x + \tilde{x}}{2} \right\|^2 < \left\| \frac{x + \tilde{x}}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x - \tilde{x}}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(d^2 + d^2) = d^2$ $\lightning$ zu $\frac{1}{2}(x + \tilde{x}) \in K$. $\blacksquare$

Lemma IV.3.3 $K \subseteq H$ abgeschlossen & konvex, $x_0 \in H$
Dann sind für $x \in K$ äquivalent

i) $\|x_0 - x\| = \inf\limits_{y \in K} \|x_0 - y\|$

ii) $\operatorname{Re} \langle x_0 - x, y - x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K$



Bew.: ii) $\Rightarrow$ i):

$$\|x_0 - y\|^2 = \|(x_0 - x) + (x - y)\|^2 = \|x_0 - x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x_0 - x, x - y \rangle + \|x - y\|^2$$

$$\geq \|x_0 - x\|^2 \quad \Rightarrow \|x_0 - x\| \text{ ist untere Schranke}$$

(und das $x \in K$ aus Satz IV.3.2 liefert Gleichheit)

i) $\Rightarrow$ ii) Für $t \in [0,1]$ setze $y_t = (1-t)x + ty \in K$ für $y \in K$.

$$\Rightarrow \|x_0 - x\|^2 \leq \|x_0 - y_t\|^2 = \|x_0 - x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x_0 - x, t(x-y) \rangle + t^2 \|x - y\|^2$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \langle x_0 - x, y - x \rangle \leq \frac{t}{2} \|x - y\|^2 \quad \forall t \in (0,1]$$

Da die rechte Seite stetig in t ist gilt die Ungleichung für $t = 0$. ▨

Theorem IV.3.4 (Orthogonalprojektion) $U \subseteq H$ abgeschl. $U \neq \{0\}$. $U \neq H$.

$\Rightarrow \exists$ lineare Projektion $P_U : H \to H$ mit $P_U(H) = U$, $\|P_U\| = 1$.

Ferner gilt $\ker(P_U) = U^\perp$, $\|id - P_U\| = 1$ und

$$H = U \oplus_2 U^\perp .$$

(Bezeichnung: P_U heißt "Orthogonalprojektion" auf U.

__Bew.:__ Sei $P_U : H \to U$ definiert durch

$$\| x - P_U(x) \| = \inf_{y \in U} \|y - x\| .$$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\langle x - P_U(x), y - P_U(x)\rangle \leq 0 \ \forall y \in U$ (Lemma)

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\langle x - P_U(x), y\rangle \leq 0 \ \forall y \in U$, da $P_U(x) \in U$

$\Leftrightarrow \langle x - P_U(x), y\rangle = 0 \ \forall y \in U$, da $y \in U \Rightarrow -y \in U$
$\Rightarrow iy \in U$

Also ist $P_U(x)$ eindeutig durch $x - P_U(x) \in U^\perp$ festgelegt

Da $U^\perp$ UVR gilt für $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $x_i \in H$

$$(\lambda_1 x_1 - \lambda_1 P_U(x_1)) + (\lambda_2 x_2 - \lambda_2 P_U(x_2)) \in U^\perp \text{, also}$$

$$P_U(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 P_U(x_1) + \lambda_2 P_U(x_2)$$

$\Rightarrow P$ ist linear mit $P_U(H) = U$ und $x \in \ker(P_U) \Leftrightarrow P_U(x) = 0 \Leftrightarrow x - 0 \in U^\perp \Leftrightarrow x \in U^\perp$.

Pythagoras: $\|x\|^2 = \|P_U(x) + (x - P_U(x))\|^2 = \|P_U(x)\|^2 + \|(id - P_U)x\|^2$

$$\Rightarrow H = U \oplus_2 U^\perp$$

und $\|P_U\| \leq 1$, $\|id - P_U\| \leq 1$. Da $U \neq \{0\}$ und $U \neq H$ haben P_U und $id - P_U$ mind. einen Fixpunkt $\Rightarrow \|P_U\| = 1$ und $\|id - P_U\| = 1$. ∎

Bem. IV.3.5 In Hilberträumen sind also abgeschl. Teilräume immer komplementiert. Es gilt sogar die Umkehrung, dass ein Banachraum, in dem jeder abgeschlossene Teilraum komplementiert ist, isomorph zu einem Hilbertraum ist [Lindenstrauss-Tzafriri, Israel J. Math. 9 (1971) 263-269].

Korollar IV.3.6 Für $U \subseteq H$ beliebig gilt

$$\overline{\operatorname{span} U} = U^{\perp\perp}.$$

Insbesondere also $U^{\perp} = \{0\} \iff \operatorname{span} U$ ist dicht.

Bew.: Für $V \subseteq H$ abgeschlossen ist $id - P_V = P_{V^\perp}$. Da

$$U^\perp = \operatorname{span} U^\perp = \left(\overline{\operatorname{span} U}\right)^\perp \quad (\text{warum?})$$

gilt für $V = \overline{\operatorname{span} U}$:

$$(\operatorname{span} U)^\perp = V^\perp \quad \text{und} \quad id - P_{V^\perp} = P_{V^{\perp\perp}}$$

$\Rightarrow P_V = P_{V^{\perp\perp}}$, also

$$\overline{\operatorname{span} U} = V^{\perp\perp} = \left((\operatorname{span} U)^\perp\right)^\perp = U^{\perp\perp}. \qquad \blacksquare$$

Theorem IV.3.7 (Fréchet-Riesz): Die Abbildung

$$\phi : H \to H' \qquad \phi(y)(x) := \langle x, y \rangle$$

ist bijektiv, isometrisch und antilinear (d.h. $\phi(\lambda y) = \bar{\lambda}\phi(y)$).

<u>Bew.:</u> z.Z.: ϕ ist surjektive Isometrie ($\Rightarrow \phi$ injektiv, Rest ist klar).

Cauchy-Schwarz: $\|\phi(y)(x)\| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \Rightarrow \|\phi(y)\| \leq \|y\|$

und $\|\phi(y)(\frac{y}{\|y\|})\| = \frac{\langle y, y\rangle}{\|y\|} = \|y\| \Rightarrow \|\phi(y)\| = \|y\|$.

$\Rightarrow \phi$ ist Isometrie.

Für $x' \in H'$ mit $\|x'\| = 1$ setze $U = \ker(x') \Rightarrow H = U \oplus_2 U^\perp$ und

$U^\perp = \mathbb{K} \cdot y$ mit $x'(y) = 1$

$$\Rightarrow x'(\underbrace{u + \lambda \cdot y}_{\in U \oplus U^\perp}) = \lambda \quad \text{und} \quad \langle u + \lambda y, y\rangle = \lambda \|y\|^2$$

$\Rightarrow \phi(\frac{y}{\|y\|^2}) = x'$ und somit ist ϕ surjektiv. $\blacksquare$

<u>Bsp. III.3.8</u>: Ist I beliebige Menge, μ das Zählmaß, so ist

$$L^2(I, \mu) = \{ (x_i)_{i \in I} : \underbrace{(|x_i|^2)_{i \in I}}\text{ ist summierbar, also } \sup_{\substack{J \subseteq I \\ |J| < \infty}} \sum_{j \in J} |x_j|^2 < \infty \}$$

$\leadsto$ Hilbertraum für beliebige Mengen (vgl. reproduzierende Kerne).

IV.4 Orthonormalbasen

Wir werden nun eine erste, grobe Klassifikation von Hilberträumen kennenlernen. Es sei immer H ein Hilbertraum.

Def. IV.4.1: $S \subseteq H$ heißt Orthonormalsystem (ONS) $\|e\| = 1 \ \forall e \in S$ und $\langle e, f \rangle = 0$ falls $e \neq f$. S heißt Orthonormalbasis (ONB) wenn S maximales ONS ist, d.h.

$$S \subseteq T, \ T \text{ ONS} \Rightarrow T = S$$

ACHTUNG: Eine ONB ist keine Vektorraumbasis!

Bsp. IV.4.2: In ℓ^2 ist die Menge $S = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein ONS

Satz IV.4.3 (Gram-Schmidt): Ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ lin. unabhängige Teilmenge von H. Dann ex. ein ONS S mit $\operatorname{span} S = \operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Bew.: Wie im endlich-dimensionalen Fall. ∎

Bsp. IV.4.4: Wendet man das Gram-Schmidt Verfahren auf $H = L^2[-1,1]$ und $x_n(t) = t^n$ an, so erhält man als ONS die Legendrepolynome.

Satz IV.4.5 (Besselsche Ungl.): Ist $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ ein ONS und $x\in H$, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x,e_n\rangle|^2 \le \|x\|^2$$

Bew.: Für $n\in\mathbb{N}$ setze $x_n := x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k$ ($\Rightarrow x_n \perp e_k$ für $k\le n$)

$$\overset{\text{(Pythagoras)}}{\Longrightarrow} \|x\|^2 = \|x_n\|^2 + \Big\|\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_n\rangle e_k\Big\|^2$$

$$= \|x_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2 \ge \sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2. \quad \blacksquare$$

Korollar IV.4.6: $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ ONS, $x,y\in H$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x,e_n\rangle\langle e_n,y\rangle| < \infty$$

Bew.:

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x,e_n\rangle\langle e_n,y\rangle|\Big)^2 \overset{\text{Hölder}}{\le} \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty}|\langle e_n,y\rangle|^2 \overset{\text{Satz IV.4.5}}{\le} \|x\|^2\cdot\|y\|^2$$

$\blacksquare$

Korollar IV.4.7 $S\subseteq H$ ONS, $x\in H$

$$\Longrightarrow S_x := \{e\in S : \langle e,x\rangle \ne 0\} \text{ ist höchstens abzählbar.}$$

Bew.: Satz IV.4.5 $\Longrightarrow S_{x,n} := \{e\in S : |\langle e,x\rangle| \ge \frac{1}{n}\}$ endlich $\forall n\in\mathbb{N}$.

$$\Longrightarrow S_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{x,n} \text{ ist abzählbar.}$$

Def. IV.4.8: X: normiert, I beliebige Menge, $x_i \in X$ für $i \in I$. Dann konvergiert $\sum_{i\in I} x_i$ unbedingt gegen $x \in X$ falls

a) $I_0 = \{i \in I : x_i \neq 0\}$ ist höchstens abzählbar

b) Für jede Aufzählung $I_0 = \{i_1, i_2, \dots\}$ konvergiert $\left(\sum_{k=1}^{n} x_{i_k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.

In diesem Fall schreiben wir $\sum_{i\in I} x_i = x$.

Satz IV.4.9: Ist $S \subseteq H$ ein ONS, so gilt

$$\sum_{e\in S} |\langle x, e\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Bew.: Folgt aus Kor. IV.4.7 und Satz IV.4.5. ∎

Satz IV.4.10: Ist $S \subseteq H$ ein ONS so gilt:

a) Für alle $x \in H$ konvergiert $\sum_{e\in S} \langle x, e\rangle e$ unbedingt

b) $x \mapsto \underbrace{\sum_{e\in S} \langle x, e\rangle e}_{=: P_x}$ ist die Orthogonalprojektion auf $\overline{\text{span}\, S}$.

Bew.: a) Sei $\{e_1, e_2, \dots\}$ eine Aufzählung von $\{e \in S : \langle x, e\rangle \neq 0\}$

$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge, da

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=} \sum_{k=n}^{m} |\langle x, e_k\rangle|^2 \xrightarrow[m\to\infty]{n\to\infty} 0$$

$$\Rightarrow \quad y := \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k .$$

Ist $\{e_{\pi(1)}, e_{\pi(2)}, \dots\}$ mit $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv eine andere Aufzählung, so gilt

Korollar IV.4.6 + Umordnung

$$\langle y, z \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, z \rangle \overset{\text{Korollar IV.4.6 + Umordnung}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_{\pi(k)} \rangle \langle e_{\pi(k)}, z \rangle = \langle y_\pi, z \rangle$$

wobei $y_\pi := \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_{\pi(k)} \rangle e_k$. Da dies für alle $z \in H$ gilt haben wir $y - y_\pi \in H^\perp = \{0\}$.

b) z.Z.: $x - Px \in (\overline{\operatorname{span} S})^\perp = S^\perp$, aber das ist gerade nach Konstruktion so. ▨

<u>Satz IV.4.11</u> Für ein ONS $S \subseteq H$ gilt

a) $\exists$ eine ONB S' mit $S \subseteq S'$

b) Es sind äquivalent

i) S ist ONB

ii) $x \perp S \Rightarrow x = 0$

iii) $H = \overline{\operatorname{span} S}$

iv) $x = \sum_{e \in S} \langle x, e \rangle e \quad \forall x \in H$

v) $\langle x, y \rangle = \sum_{e \in S} \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle \quad \forall x, y \in H$

vi) $\|x\|^2 = \sum_{e \in S} |\langle x, e \rangle|^2 \quad \forall x \in H$ (Parsevalsche Gl.)

Bew.: a) Wende das Zornsche Lemma auf die Orthonormalsysteme von H an

b) i) $\Rightarrow$ ii) : Wäre $x \perp S$, $x \neq 0$, so wäre $S \cup \{\frac{x}{\|x\|}\}$ ein ONS

ii) $\Rightarrow$ iii) : $S^{\perp} = (\overline{\operatorname{span} S})^{\perp} = \{0\} \Rightarrow (\overline{\operatorname{span} S})^{\perp\perp} = H$, wobei $(\overline{\operatorname{span} S})^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{span} S}$

iii) $\Rightarrow$ iv) : voriger Satz

iv) $\Rightarrow$ v) : Einsetzen

v) $\Rightarrow$ vi) : $x = y$

vi) $\Rightarrow$ i) : Ist S keine ONB, so ex. $0 \neq x \in H$ so dass $\{x\} \cup S$ ONS ist, im Widerspruch zu

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in S} |\langle e, x \rangle|^2 = 0$$ ▨

Korollar IV.4.12 Ist $\dim H = \infty$, so sind äquivalent:

i) H ist separabel

ii) Alle ONB sind abzählbar

iii) Es ex. eine abzählbare ONB

Bew.: i) $\Rightarrow$ ii) : Ist S ONB so gilt $\|e - f\| = \sqrt{2}$ $\forall e, f \in S$

$\Rightarrow |S| = |\mathbb{N}|$ (analog zur Inseparabilität von ℓ^∞)

ii) $\Rightarrow$ iii) : trivial

iii) $\Rightarrow$ i) Satz IV.4.11 b) iii) und Lemma I.4.10 ▨

Lemma IV.4.13 Sind S und T ONB von H, so sind S und T gleich mächtig (d.h. $\exists$ Bijektion $S \to T$).

Bew.: Es genügt zu zeigen, dass Injektionen $S \hookrightarrow T$ und $T \hookrightarrow S$ existieren (Satz von Cantor-Bernstein-Schröder).

Sei o.B.d.A. $|S| = \infty$ und $|T| = \infty$. Für $x \in S$ setze

$$T_x := \{y \in T : \langle x, y \rangle \neq 0\}$$ (ist nach Kor IV.4.7 höchstens abzählbar)

Nach Satz IV.4.11 b) ii): $T \subseteq \bigcup_{x \in S} T_x$ da $S^\perp = \{0\}$

$$\Rightarrow \exists \bigcup_{x \in S} T_x \hookrightarrow S \quad \text{und}$$

$$T \hookrightarrow \bigcup_{x \in S} T_x \subseteq T$$

Genauso zeigt man $S \hookrightarrow T$. ▨