III. Hauptsätze für Operatoren auf Banachräumen

III.1 Der Satz von Baire

Satz III.1.1 (Baire) X: vollst. metr. Raum, $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener und dichter Teilmengen

$$\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \text{ ist dicht}$$

Bew.:

$$D := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$$

$$B_\varepsilon(x) := \{ y \in X : d(x,y) < \varepsilon \}$$

Zu zeigen $D \cap B_{\varepsilon_0}(x_0) \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon_0 > 0, x_0 \in X$

O_1 offen $\Rightarrow$ $O_1 \cap B_{\varepsilon_0}(x_0) \neq \emptyset$ und $\exists\ x_1, \varepsilon_1 < \frac{1}{2}\varepsilon_0$ mit

$$\left.\begin{array}{l} B_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq O_1 \\ B_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq B_{\varepsilon_0}(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow B_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq O_1 \cap B_{\varepsilon_0}(x_0)$$

(sogar o.B.d.A.: $\overline{B_{\varepsilon_1}(x_1)} \subseteq O_1 \cap B_{\varepsilon_0}(x_0)$)

O_2 offen $\Rightarrow$ $O_2 \cap B_{\varepsilon_1}(x_1) \neq \emptyset$ und $\exists\ x_2, \varepsilon_2 < \frac{1}{2}\varepsilon_1$ mit

$$\left.\begin{array}{l} B_{\varepsilon_2}(x_2) \subseteq O_2 \\ B_{\varepsilon_2}(x_2) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow B_{\varepsilon_2}(x_2) \subseteq O_2 \cap B_{\varepsilon_1}(x_1)$$

(sogar o.B.d.A.: $\overline{B_{\varepsilon_2}(x_2)} \subseteq O_2 \cap B_{\varepsilon_1}(x_1)$)

⋮

$\leadsto \exists$ Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

a) $\varepsilon_n < \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}$ $(\Rightarrow \varepsilon_n < 2^{-n}\varepsilon_0)$

b) $\overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)} \subseteq O_n \cap B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}) \subseteq \dots \subseteq O_1 \cap \dots \cap O_n \cap B_{\varepsilon_0}(x_0)$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge. Setze $x := \lim_{n\to\infty} x_n$

$\Rightarrow x \in \overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow x \in O_1 \cap \dots \cap O_n$ $\forall n \in\mathbb{N}$

$\Rightarrow x \in D$ $\blacksquare$

Bsp. III.1.2: Die Vollständigkeit von X ist wichtig, z.B. in $\mathbb{Q}$ definiert jede Aufzählung $\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \dots\}$ offene und dichte Mengen $O_n := \mathbb{Q}\setminus\{x_n\}$ mit $\bigcap O_n = \emptyset$.

Def. III.1.3 X: metrischer Raum. Dann heißt $Y \subseteq X$

- nirgends dicht :$\Leftrightarrow$ $\overline{Y}$ hat keinen inneren Punkt ($\Leftrightarrow X\setminus\overline{Y}$ ist dicht)
- dünn (oder mager) :$\Leftrightarrow$ $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ mit Y_n nirgends dicht
- dick (oder komager, oder residuell) $\Leftrightarrow$ $Y \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ mit Y_n offen u. dicht

Lemma III.1.4: Y dünn $\Leftrightarrow$ $X\setminus Y$ dick (Bew.: Klar)

Korollar III.1.5: a) X vollständig, $Y \subseteq X$ dick $\Rightarrow$ Y liegt dicht in X

b) X vollständig $\Rightarrow$ X ist nicht dünn

Bem. III.1.6 Die traditionelle Bezeichnung von Baire war

Y ist von 1. Kategorie in $X :\Leftrightarrow$ Y ist dünn

Y ist von 2. Kategorie in $X :\Leftrightarrow$ Y ist nicht dünn

Diese Bezeichnung ist jedoch recht unglücklich, da sie nichts mit Kategorien (im modernen Sinne) zu tun hat.

Satz III.1.7 Es gibt stetige Funktionen (auf $[0,1]$), die an keiner Stelle differenzierbar sind.

Bew.: Für $n\in\mathbb{N}$ setze

x ggf. konstant stetig fortgesetzt

$$E_n := \left\{ x \in C[0,1] : \sup_{0<|h|<\frac{1}{n}} \left\{ \left|\frac{1}{h}(x(t+h)-x(t))\right| > n \quad \forall t\in[0,1] \right\}\right\}$$

Dann gilt

$$x\in E_n \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in[0,1] \underbrace{\ }_{\exists h \text{ mit}} |h|\in\,]0,\tfrac{1}{n}] \text{ mit } \left|\frac{1}{h}(x(t+h)-x(t))\right| > n$$

Also: $x\in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(x(t+h)-x(t))$ konvergiert nicht $\forall t\in[0,1]$

$\Rightarrow x$ ist nirgends diff'bar.

Zeige: E_n ist offen und dicht (da $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \neq \emptyset$ zeigt das die Beh.)

↑ Bairscher Satz

1: E_n ist offen

Zu $t\in[0,1]$ sei $\delta_t > 0$ definiert durch

$$\sup_{0<|h|\leq\frac{1}{n}} \left|\frac{1}{h}(x(t+h)-x(t))\right| = n+2\delta_t$$

$\Rightarrow \exists h_t$ mit $|h_t| \in]0, \frac{1}{n}]$ mit $\left|\frac{1}{h_t}(x(t+h_t)-x(t))\right| > n + \delta_t$

x stetig $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_t > 0$ so dass $\left|\frac{1}{h_t}(x(s+h_t)-x(s))\right| > n+\delta_t$ für alle $s \in U_{\varepsilon_t}(t)$ gilt

$[0,1]$ kompakt $\Rightarrow [0,1] \subseteq U_{\varepsilon_{t_1}}(t_1) \cup \ldots \cup U_{\varepsilon_{t_r}}(t_r)$

$\rightsquigarrow$ setze $\delta := \min\{\delta_{t_1}, \ldots, \delta_{t_r}\}$

$h := \min\{|h_{t_1}|, \ldots, |h_{t_r}|\}$

$\Rightarrow \quad s \in U_{\varepsilon_{t_i}}(t_i) \Rightarrow \left|\frac{1}{h_{t_i}}(x(s+h_{t_i})-x(s))\right| > n+\delta$

Für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} h\delta$ und $\|y-x\|_\infty < \varepsilon$ gilt nun $y \in E_n$:

$t \in [0,1] \Rightarrow t \in U_{\varepsilon_{t_i}}(t_i)$ für ein i

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{h_{t_i}}(y(t+h_{t_i})-y(t))\right| \geq \left|\frac{1}{h_{t_i}}(x(t+h_{t_i})-x(t))\right| - 2\frac{\|x-y\|_\infty}{h_{t_i}}$$

$$> n+\delta - 2\frac{\varepsilon}{h} > n$$

Also ist E_n offen.

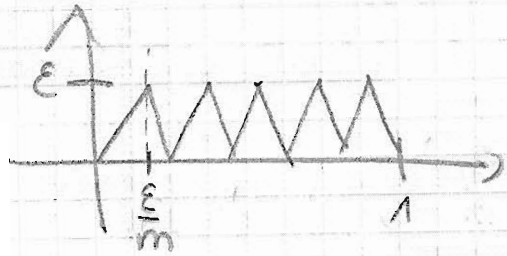
2: E_n ist dicht

Sei $O \neq \emptyset$ eine beliebige offene Menge. Zeige: $O \cap E_n \neq \emptyset$

Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz ex. ein Polynom p in O und außerdem (da O offen) ein $\varepsilon > 0$ so dass

$$\|x-p\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow x \in O \text{ gilt.}$$

Sei y_m Sägezahnfktn mit Steigung m und Amplitude ε:



$\Rightarrow$ $x_m := p + y_m \in O$ und außerdem $x_m \in E_n$ falls $m > n + \|p'\|_\infty$:

$$\left|\frac{1}{h}\big(x_m(t+h)-x_m(t)\big)\right| \geq \left|\underbrace{\frac{1}{h}\big(y_m(t+h)-y_m(t)\big)}_{=m \text{ falls } 0\le t\le \frac{\varepsilon}{m},\ h \text{ geeignet}}\right| - \left|\frac{1}{h}\big(p(t+h)-p(t)\big)\right|$$

$$\Rightarrow \sup_{0<|h|\le \frac{1}{n}} \left|\frac{1}{h}\big(x_m(t+h)-x_m(t)\big)\right| \underset{\text{Mittelwertsatz}}{\geq} m - \|p'\|_\infty > n \qquad \blacksquare$$

<u>Bem. III.1.8</u> Wir haben nicht nur gezeigt, dass nirgends diff'bare Fktn. existieren, sondern dass "fast alle" Funktionen so sind. Gilt eine Eigenschaft für alle Elemente aus einer dicken Teilmenge, so nennt man diese auch "generisch".

Satz III.1.6 sagt also, dass die "generische Funktion" nirgends diff'bar ist.

III.2 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Theorem III.2.1 (Satz von Banach-Steinhaus)

X: Banachraum, Y: normiert I: beliebige Menge und $T_i \in L(X,Y)$ für $i \in I$. Dann gilt

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty \ \forall x \in X \Rightarrow \sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$$

Bew.: Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$E_n := \{x \in X : \sup_{i\in I} \|T_i x\| \le n\} = \bigcap_{i\in I} \|T_i(\cdot)\|^{-1}([0,n])$$

$\Rightarrow E_n$ abgeschl.

Damit gilt $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ wenn $\sup_{i\in I} \|T x_i\| < \infty \ \forall x \in X$ und nach Korollar II.1.5 b) enthält einen inneren Punkt.

$\Rightarrow \exists \ N \in \mathbb{N}, y \in E_N$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$\|x-y\| \le \varepsilon \Rightarrow \pm x \in E_N \quad (\text{da } E_N = -E_N)$$

Nach Definition gilt $x, y \in E_N \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in E_N$, also

$$\|u\| \le \varepsilon \Rightarrow u = \frac{1}{2}\big((u+y) + (u-y)\big) \in E_N.$$

Damit gilt

$$\|u\| \le 1 \Rightarrow \sup_{i\in I} \|T_i u\| \le \frac{N}{\varepsilon}$$

und somit $\sup_{i\in I} \|T_i\| \le \frac{N}{\varepsilon} < \infty$. ▨

Bem III.2.2 Der Satz von Banach-Steinhaus gilt (mit dem gleichen Beweis) in allgemeineren Kontexten (z.B. beschränkte Abbildungen auf top. Vektorräumen). Da hier i.A. Beschränktheit nichtmehr das gleiche ist wie Stetigkeit heißt dieser Satz auch "Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit" (und nicht "Prinzip der glm. Stetigkeit), vgl. Rudin.

Korollar III.2.3 X: Banachraum, Y: normiert, $T_n \in L(X,Y)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$T_n x \text{ konvergiert } \forall x \in X \Rightarrow \left(x \mapsto T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n x\right) \in L(X,Y)$$

Bew.: Linearität von T: klar.

$$T_n x \text{ konvergiert } \Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| < \infty$$

$$\underset{\text{Th. II.2.1}}{\Rightarrow} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < M \text{ für ein } M \geq 0.$$

$$\Rightarrow \|Tx\| = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq M \cdot \|x\|. \quad \blacksquare$$

Korollar III.2.4 X, Y: Banachraum, $A_n \in L(X,Y)$. Dann sind äquivalent

a) A_n konvergiert punktweise gegen $A_n \in L(X,Y)$

b) $(\|A_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für alle x aus einer dichten Teilmenge.

Bew.: a) ⇒ b): folgt direkt aus Theorem II.2.1

b) ⇒ a) Wird durch ein $\frac{\varepsilon}{3}$-Argument gezeigt:

Sei $y \in A$, $\varepsilon > 0$ und $\gamma := \sup \|A_n\|$

$\Rightarrow \exists\, x \in X$ mit $\|y - x\| < \frac{\varepsilon}{3\gamma}$ und

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\|A_n x - A_m x\| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall n, m > n_0$

Das impliziert

$$\|A_n y - A_m y\| \leq \|A_n y - A_n x\| + \|A_n x - A_m x\| + \|A_m x - A_m y\|$$
$$\leq \|A_n\| \, \|y - x\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|A_m\| \, \|y - x\|$$
$$\leq \gamma \cdot \frac{\varepsilon}{3\gamma} + \frac{\varepsilon}{3} + \gamma \cdot \frac{\varepsilon}{3\gamma} = \varepsilon$$

Also ist $(A_n y)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert, somit folgt a) aus Korollar III.2.3. ▨

III.3 Der Satz von der offenen Abbildung

Def. III.3.1 X, Y: metrische Räume. Dann heißt $f: X \to Y$ offene (bzw. abgeschlossene) Abbildung, falls $f(O) \subseteq Y$ offen (abgeschlossen) für alle $O \subseteq X$ offen (abgeschl.) ist.

Bsp. III.3.2 a) Jede Quotientenabbildung ist offen

b) Die Quotientenabbildung $pr: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto x$ ist nicht abgeschlossen, da

$$pr(\underbrace{\{(x,y) : x \cdot y = 1\}}_{\text{abgeschl.}}) = \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\text{offen}}$$

Lemma III.3.3 X, Y: normiert, $T: X \to Y$ linear. Dann sind äquivalent:

a) T ist offen

b) T bildet offene Kugeln um 0 auf offene Nullumgebungen ab

c) $\exists\, \varepsilon > 0$ so dass $B_\varepsilon^Y(0) \subseteq T(B_\varepsilon^X(1))$

Bew: a) $\Rightarrow$ b): Klar, da $T(0) = 0$

b) $\Rightarrow$ a) $O \subseteq X$ offen z.Z.: $\forall x \in O\ \exists\, \varepsilon > 0$ mit $Tx + B_\varepsilon^Y(0) \subseteq T(O)$

O offen $\Rightarrow \exists\, r > 0$ mit $B_r^X(0) + x \subseteq O$

b) $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^Y(0) \subseteq T(B_r^X(0))$

Also ist $Tx + B_\varepsilon^Y(0) \subseteq Tx + T(B_r^X(0)) \subseteq T(x + B_r^X(0)) \subseteq T(O)$

b) $\Leftrightarrow$ c) nach Definition und Linearität von T.

Theorem III.3.4 (Satz von der offenen Abbildung)

X, Y: Banachräume, $T \in L(X, Y)$. Dann gilt

$$T \text{ surjektiv} \Leftrightarrow T \text{ ist offen}$$

Bew: "$\Leftarrow$" ist klar nach Lemma III.3.3 c)

"$\Rightarrow$" Notation: für $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon := B_\varepsilon^X(0)$ und $V_\varepsilon := B_\varepsilon^Y(0)$

1. Schritt: $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ mit $V_{\varepsilon_0} \subseteq \overline{T(U_1)}$

T surjektiv $\Rightarrow Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(U_n)}$

$\underset{\text{Kor. III.1.5 b)}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, N\in\mathbb{N}$ so dass $\overline{T(U_N)}$ einen inneren Punkt y_0 enthält

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon>0$ mit $\|x-y_0\|<\varepsilon \Rightarrow x\in\overline{T(U_N)}$

und $\|x+y_0\|<\varepsilon \Rightarrow x\in\overline{T(U_N)}$

(da $\overline{T(U_N)} = -\overline{T(U_N)}$). Außerdem gilt $x,y\in\overline{T(U_N)} \Rightarrow \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\in\overline{T(U_N)}$ und somit

$\|y\|<\varepsilon \Rightarrow y+y_0\in\overline{T(U_N)}$ und $y-y_0\in\overline{T(U_N)}$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}(y+y_0)+\frac{1}{2}(y-y_0)\in\overline{T(U_N)}$

Also $V_{\varepsilon_0}\subseteq\overline{T(U_1)}$ mit $\varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{N}$.

2. Schritt: $V_{\varepsilon_0}\subseteq T(U_1)$ (das reicht nach Lemma III.3.3 c))

Sei $\|y\|<\varepsilon_0 \Rightarrow \exists\,\varepsilon>0$ mit $\|y\|<\varepsilon<\varepsilon_0$ und setze $\tilde{y}:=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}y$

$\Rightarrow \|\tilde{y}\|<\varepsilon_0$ und $\tilde{y}\in\overline{T(U_1)}$ (da $V_{\varepsilon_0}\subseteq\overline{T(U_1)}$) $\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}>1\right)$

$\Rightarrow \exists\, y_0=T(x_0)$ mit $\|y_0-\underbrace{\tilde{y}}\|<\alpha\cdot\varepsilon_0$ und $x_0\in U_1$

für $1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}<\alpha<1$

Da $\left\|\frac{\overbrace{y_0-\tilde{y}}}{\alpha}\right\|<\varepsilon_0$ ex. $y_1=Tx_1$ mit $x_1\in U_1$ und

$\left\|\frac{\overbrace{y_0-\tilde{y}}}{\alpha}-y_1\right\|<\alpha\,\varepsilon_0$

$\Rightarrow \|\tilde{y}-y-\alpha y_1\|<\alpha^2\cdot\varepsilon_0$

~~us~~ induktiv: $\exists$ Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U_1 mit

$$\left\| \overline{y} - T\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha^i x_i\right) \right\| < \alpha^{n+1} \varepsilon$$

$\Rightarrow \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha^i x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert absolut und somit auch in X (Lemma I.2.10) gegen ein $\overline{x}$ mit $T(\overline{x}) = \overline{y}$

$\Rightarrow y = T(x)$ für $x := \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \overline{x}$ und es gilt

$$\|x\| = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \|\overline{x}\| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum \alpha^i \|x_i\| < \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sum \alpha^i = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Konstr. von } \alpha}}{\frac{1}{1-\alpha}} < 1$$

$\Rightarrow y \in T(U_1)$

$\blacksquare$

<u>Korollar III.3.5</u> X, Y Banachräume, $T \in L(X,Y)$ bijektiv
$\Rightarrow T^{-1}$ ist stetig

<u>Bsp III.3.6</u> X: normiert und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis

$\Rightarrow$ $x_n \mapsto \frac{1}{n} x_n$ definiert eine lineare, stetige und bijektive Abbildung mit der unstetigen Umkehrabb.

$x_n \mapsto n \cdot x_n$

Also kann X <u>kein</u> Banachraum sein.

<u>Korollar III.3.7</u> X: Vektorraum mit den Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$.

Ist X bzgl $\|\cdot\|$ und bzgl $|||\cdot|||$ vollständig, so sind $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ äquivalent.

<u>Bew.:</u> Wende Kor. III.3.5 auf $id: (X, \|\cdot\|) \to (X, |||\cdot|||)$ an.

Korollar III.3.8 (kanonische Faktorisierung) X, Y: Banachräume

$$f \in L(X,Y), \quad f(X) = Y$$

$\Rightarrow$ die induzierte Abbildung $\bar{f}: X/\ker(f) \to Y$, $[x] \mapsto f(x)$

hat ein stetiges Inverses.

III.4 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Wir kommen nun zu einer weiteren wichtigen Klasse linearer Abbildungen, die nicht mehr stetig sein müssen.

Def III.4.1 X, Y normiert $D \subseteq X$, $T: D \to Y$ linear.
Dann heißt T abgeschlossener Operator falls gilt

$$\left.\begin{array}{l} (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Folge in } D, \text{ konvergent in } X \\ (Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } Y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_n := \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in D \\ \text{und} \\ T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T(x_n). \end{array}$$

(Notation: $T: X \supseteq D \to Y$)

Im Vergleich zu einem stetigen Operator ist T also "zu schwach" um die Konvergenz von $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu erzwingen. Wenn $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jedoch konvergiert, soll T den Grenzwert erhalten.

Lemma III.4.2 Seien X, Y, D und T wie in voriger Def.
Dann gilt

a) $\Gamma T := \{(x, Tx) \in X \oplus Y : x \in D\}$ ist ein UVR von $X \oplus Y$

b) T ist genau dann abgeschlossener Operator wenn ΓT abgeschl. ist

Bew: a): klar b): klar (mit Lemma I.4.15)

Lemma III.4.3 $T: X \supseteq D \to Y$ abgeschlossen und für $x \in D$ sei

$$\|x\|_T := \|x\| + \|Tx\|$$

a) X, Y vollständig $\Rightarrow$ D vollständig bzgl. $\|\cdot\|_T$

b) T ist stetig bzgl $\|\cdot\|_T$ (und der ursprünglichen Norm auf Y).

Bew.: a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C.F. bzgl $\|\cdot\|_T \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C.F. bzgl. $\|\cdot\|_X$

$(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C.F. bzgl. $\|\cdot\|_Y$

$\Rightarrow$ $x_n \to x \in D$, da T abgeschlossen und $Tx_n \to Tx$

$\Rightarrow$ $\|x - x_n\|_T = \|x - x_n\| - \|Tx - Tx_n\| \to 0$

b) $\|Tx\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|x\|_T \Rightarrow \|T\| \leq 1$ (bzgl. $\|\cdot\|_T$ auf D) ▨

Theorem III.4.4 (Satz von der offenen Abbildung)

X, Y: Banachräume, $T: X \supseteq D \to Y$ abgeschlossen. Dann gilt

T surjektiv $\Longleftrightarrow$ T ist offen (bzgl. $\|\cdot\|_X$ auf D)

Bew.: "$\Leftarrow$" klar nach Lemma III.3.2

"$\Rightarrow$" $T: (D, \|\cdot\|_T) \to Y$ ist offen nach Theorem III.3.4

Da $\|x\|_X \leq \|x\|_T$ ist jede $\|\cdot\|_X$-offene Menge auch $\|\cdot\|_T$-offen und somit D bzgl $\|\cdot\|_X$ offen.

Theorem III.4.5 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)

X, Y: Banachräume. Dann gilt

$T: X \to Y$ abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ T ist stetig

(also $D = X$ in Def. III.4.1)

Bew.: "$\Longleftarrow$": klar nach Def. III.4.1 (und Lemma III.4.2 a))

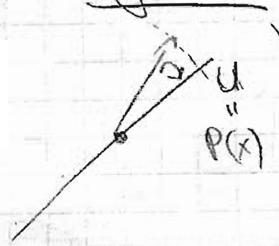
"$\Longrightarrow$" Nach Kor. III.3.7 sind $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_T$ auf X äquivalent, also ist T stetig nach Lemma III.4.2 b). ∎

IV Hilberträume

IV.1: Projektionen auf Banachräumen

Def. IV.1.1 X: Vektorraum. $P: X \to X$ linear heißt Projektion, falls $P^2 = P$.

(z.B. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



)

Erinnerung:

Projektionen von X $\xleftrightarrow{1:1}$ Zerlegungen $X \cong U \oplus V$

(alles rein algebraisch).

Lemma IV.1.2: X: normiert, $P: X \to X$ stetige Projektion $\Longrightarrow$

a) Entweder $P = 0$ oder $\|P\| \geq 1$

b) $\ker(P)$ und $\operatorname{im}(P)$ sind abgeschlossen

c) $X \cong \ker(P) \oplus \operatorname{ran}(P)$ (stetiger Isomorphismus)

Bew.: a) $\|P\| = \|P^2\| \leq \|P\|^2 \Rightarrow \|P\| = 0$ oder $\|P\| \geq 1$

b) $\ker(P) = P^{-1}(\{0\})$, $\mathrm{im}(P) = \ker(\mathrm{id}_X - P)$

c) $x = \underbrace{P(x)}_{\in \mathrm{im}(P)} + \underbrace{(\mathrm{id}_X - P)(x)}_{\in \ker(P)}$ ∎

Bsp. IV.1.3 a) (X,μ): Maßraum, $U \subseteq X$ $\quad 1 \leq p \leq \infty$

$\leadsto P_U : L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu) \quad [f] \mapsto [\chi_U \cdot f] \quad \left(\chi_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\right)$

ist Projektion mit $\|P_U\| = 1$ (falls $U \neq \emptyset$), warum?

b) Selbiges gilt für stetige oder beschränkte Fktn.

Satz IV.1.4 X: normiert, $U \subseteq X$ endlichdim.

$\Rightarrow \exists\, P: X \to X$ stetige Projektion mit $P(X) = U$, $\|P\| \leq \dim U$

Bew.: $\{b_1, .., b_n\}$ Basis von U mit dualer Basis $\{b_1', .., b_n'\}$.

$\leadsto \exists$ stetige normgleiche Fortsetzungen $b_i' \in X'$.

$\Rightarrow P(x) := \sum_{i=1}^n b_i'(x) \cdot b_i$ hat die gewünschten Eigenschaften. ∎

Satz IV.1.5 X: Banachraum, $U, V \subseteq X$ abgeschl. mit

$$X \cong U + V, \quad U \cap V = \{0\}$$

$\Rightarrow$ a) $X \cong U \oplus V$ als Banachräume (stetiger Isomorphismus)

b) $\exists\, P: X \to X$ stetige Proj. mit $P(X) = U$

c) $V \cong X/U$

a) : $U \oplus V$ ist Banachraum nach Lemma I.4.15. und

$U \oplus V \to X$ stetig & bijektiv $\Rightarrow$ stetiger Isom. nach Satz über offene Abb.

b) : a) $\Rightarrow$ $\|u\| + \|v\| \leq M \, \|u+v\|$ $\forall u \in U, v \in V$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\cap \\ X}}{X} = \underset{\substack{\cap \\ U}}{U} + \underset{\substack{\cap \\ V}}{V} \longmapsto \underset{\substack{\cap \\ U}}{U}$$ ist wohldef. projektion und stetig

c)

$V \mapsto X/U$ ist bijektiv & stetig $\Rightarrow$ stetiger Isom. nach Satz über offene Abb.

Def. IV.1.6 X: Banachraum. $U \leq X$ abgeschl. heißt komplementiert falls $V \leq X$ abgeschl. existiert mit $X \cong U \oplus V$.

Satz IV.1.7 $c_0 \leq \ell^\infty$ ist abgeschlossen aber nicht komplementiert.

Zunächst ein technisches Lemma IV.1.8: $\exists$ I überabzählbar und $N_i \subseteq \mathbb{N}$ mit $|N_i| = \infty$ $\forall i \in I$ so daß $|N_i \cap N_j| < \infty$ $\forall i \neq j$.

Bew.: Sei $\{q_1, q_2, \dots\}$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q}$ und $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Zu $i \in I$ wähle $(x_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathbb{Q}$-Folge mit $x_n^{(i)} \to i$ und setze

$$N_i := \{ n \in \mathbb{N} : q_n = x_k^{(i)} \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \}$$

(wäre $|N_i \cap N_j| = \infty$, so gäbe es $x_k^{(i)} = x_{k'}^{(j)}$ mit k und k' beliebig groß $\Rightarrow$ gäbe Teilfolgen $(x_k^{(i)})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(x_{k'}^{(j)})_{k' \in \mathbb{N}}$ mit gleichem Limes $\Rightarrow i = j$).

__Bew.__ (von Satz $\underline{IV}.17$):

Annahme: c_0 komplementiert $\Rightarrow \ell^\infty/c_0 \cong V$ mit $V \leq \ell^\infty$ abgeschl.

$\exists\ \underbrace{v_n' \in V'}_{(z.B.\ v_n'((s_k)_{k\in\mathbb{N}}) := s_n)}$ mit $v_n'(v) = v_n'(w)\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow v = w$, also

$\exists\ x_n' \in X'$ $(X := \ell^\infty/c_0)$ mit $x_n'(x) = x_n'(y)\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = y.$ $(*)$

Dies wird zum Widerspruch geführt:

- Wähle $N_i \subseteq \mathbb{N}$ wie in Lemma $\underline{IV}.16$ und setze

$$x_i := [\chi_{N_i}] \quad (\chi_{N_i} := \text{char. Funktion})$$

Da kein χ_{N_i} eine Nullfolge ist gilt $x_i \neq 0$.

- Für $x' \in X'$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$I^{(n)}_{0,x'} := \left\{ i \in I : |x'(x_i)| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

endlich: Sind $i_1, \dots, i_r \in I^{(n)}_{0,x'}$ verschieden, setze

$$\alpha_k := \frac{|x'(x_{i_k})|}{x'(x_{i_k})} \qquad (\Rightarrow |\alpha_k| = 1)$$

Da $|N_i \cap N_j| < \infty$ gilt $\chi_{N_{i_k}}(s) = 1 \Rightarrow \chi_{N_{i_\ell}}(s) = 0$ für $\ell \neq k$, s genügend groß

$$\Rightarrow \left\| \sum_{k=1}^r \alpha_k \cdot x_{i_k} \right\| = \limsup \left| \sum_{k=1}^r \alpha_k \cdot x_{i_k} \right| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \cdot r \leq \sum_{k=1}^r |x'(x_{i_k})| = x'\left(\sum_{k=1}^r \alpha_k \cdot x_{i_k} \right) \leq \|x'\|$$

$$\Rightarrow r \leq \|x'\| \cdot n$$

- $\forall x' \in X'$ ist $I_{x'} := \{ i \in I : x'(x_i) \neq 0 \} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I^{(n)}_{0,x'} = \{ i \in I : x'(x_i) \geq \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}\}$ abzählbar.

•) Für $x_n' \in X$ (von oben) gilt also

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{x_n'} = \{ i \in I : x_n'(x_i) \neq 0$ für ein $n \in \mathbb{N} \}$ ist abzählbar

$\Rightarrow$ Es existieren (sogar überabzählbar viele) $i_0 \in I$ mit $x_n'(x_{i_0}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $x_{i_0} \neq 0$ ist dies ein Widerspruch zu (*). ■

IV.2 Hilberträume

Die folgende Klasse von Räumen sind genau die Banachräume, die den Defekt aus Satz IV.1.7 nicht haben:

Def. IV.2.1: X: $\mathbb{K}$-Vektorraum $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt falls

a) $\langle \cdot, y \rangle : X \to \mathbb{K}$ ist linear $\forall y \in X$

b) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \langle x, \cdot \rangle : X \to \mathbb{K}$ ist anti-linear

c) $\langle x, x \rangle \geq 0 \; \forall x \in X$

d) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Für $A \subseteq X$ heißt $A^\perp := \{ x \in X : \langle x, a \rangle = 0 \; \forall a \in A \}$ das orthogonale Komplement von A (x und y heißen orthogonal falls $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow: x \perp y$)

Satz IV.2.2 (Cauchy-Schwarz)

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

(mit Gleichheit genau dann wenn x und y lin. abhängig).

Bew.: Für $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig gilt

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \lambda \overline{\langle x, y \rangle} + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 \langle x, y \rangle$$

$\uparrow$ Gleichheit gdw $0 = x + \lambda y$ mit $\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ gilt

Für $y \neq 0$ setze $\lambda := -\frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle}$

$$\Rightarrow 0 \leq \langle x,x \rangle - \frac{1}{\langle y,y \rangle}\left(|\langle x,y \rangle|^2 - |\langle x,y \rangle|^2 \right) + \frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\langle y,y \rangle} \quad \blacksquare$$

Lemma IV.2.3 $x \mapsto \|x\| := \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}$ definiert eine Norm auf X.

Bew.: Dreiecksungl. (Rest klar):

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2 \quad \blacksquare$$

Def. IV.2.3 $(X, \|\cdot\|)$ normiert heißt Prähilbertraum wenn ein Skalarprodukt $\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ mit $\|x\|^2 = \langle x,x \rangle$ existiert.
Ist X vollständig, so heißt $(X, \|\cdot\|)$ auch Hilbertraum.

Bem. IV.2.4: $\langle \cdot,\cdot \rangle$ ist eindeutig durch $\|\cdot\|$ bestimmt (Übung):

$$\langle x,y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \right) \qquad (\mathbb{K} = \mathbb{R})$$

$$\langle x,y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 \right) \quad (\mathbb{K} = \mathbb{C}).$$

Lemma IV.2.5: X: Prähilbertraum, $U \subseteq X$ dichte Teilmenge

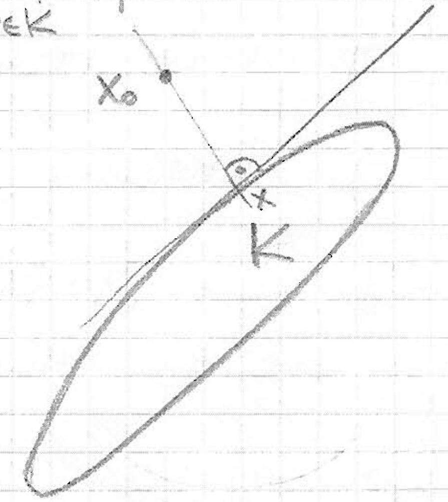
$$\Rightarrow U^\perp = \{0\}$$

Bew.: $x_0 \in U^\perp$, U dicht $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists v_n \in X$ mit $\|v_n\| \leq \frac{1}{n}$, $x_0 + v_n \in U$

$$\Rightarrow \langle x_0, x_0 \rangle = \langle x_0, x_0 + \lim_{n\to\infty} v_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_0, x_0 + v_n \rangle = 0 \quad \blacksquare$$

__Satz IV.32__ (Projektionssatz) $K \subseteq H$ abgeschl., konvex, $x_0 \in H$

$\Rightarrow$ ex. genau ein $x \in K$ mit $\|x - x_0\| = \inf_{y \in K} \|y - x_0\|$



__Bew.:__ $x_0 \in K$: Aussage trivial

$x_0 \notin K$ (o.B.d.A. $x_0 = 0$). Existenz:

$$d := \inf_{y \in K} \|y\|$$

$\Rightarrow \exists$ Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\|y_n\| \to d$

Parallelogrammgl.: $$\left\|\frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y_n - y_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2\right) \to d^2$$

$$\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in K \Rightarrow \left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m)\right\|^2 \geq d^2$$

$\Rightarrow \left\|\frac{y_n - y_m}{2}\right\| \to 0$ für $n \to \infty$ und $m \to \infty$

$\Rightarrow (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge

$\Rightarrow y_n \to x \in K$, da K abgeschl., H vollständig

Da $\|y_n\| \to d$ gilt außerdem $\|x\| = d$.

Eindeutigkeit: $\|x\| = \|\hat{x}\| = d$

$\Rightarrow \left\|\frac{x + \hat{x}}{2}\right\|^2 < \left\|\frac{x+\hat{x}}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x - \hat{x}}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(d^2 + d^2) = d^2$ $\lightning$ zu $\frac{1}{2}(x + \hat{x}) \in K$. $\blacksquare$

Satz V.2.8 X: normiert

a) X ist Prähilbertraum gdw $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (Parallelogrammgl.)

b) X ist Prähilbertraum wenn dies für alle 2-dim. Unterräume gilt.

c) Unterräume von Prähilberträumen sind Prähilberträume

d) Die Vervollständigung (Satz II.1.14) eines Prähilbertr. ist ein Hilbertraum.

Bew. a): Übung. a) ⇒ b) & c) klar.

d) Die Parallelogrammgl. überträgt sich auf die Vervollständigung (Dichtheit, Stetigkeit). ∎

Bsp. V.2.9: $L^2(X,\mu)$ ist Hilbertraum:

$\langle x,y\rangle := \int_X x(s)\overline{y(s)}\,ds$ erfüllt Skalarprodukteigenschaft

und $\|x\|_2^2 = \int_X |x(s)|^2\,ds = \int_X x(s)\overline{x(s)}\,ds = \langle x,x\rangle$.

V.3 Orthogonalität

(Im Folgenden sei immer H ein Hilbertraum)

Lemma V.3.1 a) $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

b) Für $A \subseteq H$ ist $A^\perp$ ein abgeschl. UVR.

c) $A \subseteq A^{\perp\perp}$ und $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$

d) $A^\perp = \left(\overline{\operatorname{span} A}\right)^\perp$