II. Der Satz von Hahn-Banach

Frage: Existenz von linearen (stetigen) Abbildungen?

II.1 Fortsetzungssätze

Axiom II.1.1 (Auswahlaxiom): Ist I eine Menge und für jedes $i \in I$ X_i eine nicht-leere Menge, so existiert eine Abbildung $f: I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ mit $f(i) \in X_i$

$$\left(\Leftrightarrow \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset \right)$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass dieses Axiom gilt (haben dies z.B. schon beim Beweis von

$$f: X \to Y \text{ ist stetig in } x \in X \Leftrightarrow \lim_{x_n \to x} f(x_n) = f(x)$$

verwendet)!

Lemma II.1.2 (Zorn'sches Lemma): Ist $(X, \leq)$ eine nicht-leere geordnete Menge in der jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke hat, so ex. ein $m \in X$ mit

$$x \geq m \implies x = m \quad \forall x \in X \quad (m \text{ ist maximal}).$$

⌈Beweis z.B. mit Hilfe des Tarskischen Fixpunktsatzes wird zur Verfügung gestellt.⌋

Satz II.1.3 (Tarskischer Fixpunktsatz)

Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge so dass jede total geordnete Teilmenge eine kleinste obere Schranke hat. Ist $f: X \to X$ so dass $f(x) \geq x$ $\forall x \in M$ gilt, so ex. ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = x_0$.

Beweisidee Z.L.: Nehme (o.B.d.A) an, dass jede total geordnete Menge eine kleinste obere Schranke hat.

$\forall x \in X$ ist $M_x = \{y > x\} \neq \emptyset$

$\overset{A.C.}{\Rightarrow} \exists f: X \to X$ mit $f(x) > x$, im Widerspruch zu Satz II.1.3

Def. II.1.4 X: $\mathbb{K}$-Vektorraum

$p: X \to \mathbb{R}$ heißt sublinear falls

a) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $\forall \lambda \geq 0, x \in X$

b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in X$

Bsp II.1.5

a) Jede Halbnorm ist sublinear

b) Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $X \to \mathbb{R}$ ist sublinear.

Satz II.1.6 (Hahn-Banach, algebraisch, reell)

X: $\mathbb{R}$-V.R. $U \leq X$, $p: X \to \mathbb{R}$ sublinear.

Ist $l: U \to \mathbb{R}$ linear mit $l(x) \leq p(x)$ $\forall x \in U$, so existiert $L: X \to \mathbb{R}$ linear mit $L|_U = l$ und $L(x) \leq p(x)$ $\forall x \in X$.

Bew.: 1. Aussage ist wahr falls $X/U \cong \mathbb{R}$: wähle $x_0 \in X \setminus U$

$\Rightarrow x = u + \lambda \cdot x_0$ für $u \in U, \lambda \in \mathbb{R}$ eindeutig

Für $r \in \mathbb{R}$ sei $L_r : X \to \mathbb{R}$ $u + \lambda \cdot x_0 \mapsto l(u) + \lambda \cdot r$

Wähle $r \in \mathbb{R}$ so dass

$$\sup_{w \in U} \{ l(w) - p(w - x_0) \} \le r \le \inf_{v \in U} \{ p(v + x_0) - l(v) \} \quad \forall v, w \in U$$

(so ein r existiert, da

$$l(v) + l(w) \le p(v+w) \le p(v + x_0) + p(w - x_0) \quad \forall v,w \in U$$

$$\Rightarrow \quad l(w) - p(w - x_0) \le p(v + x_0) - l(v) \quad \forall v,w \in U$$

$$\Rightarrow \quad l(w) - p(w - x_0) \le \sup_{w \in U} \{ l(w) - p(w - x_0) \}$$

$$\le \inf_{v \in U} \{ p(v + x_0) - l(v) \} \quad \forall v,w \in U)$$

Für $\lambda \geq 0$ gilt damit

·) $L_r(u + \lambda x_0) = l(u) + \lambda \cdot r \le l(u) + \lambda \cdot \left(p\left(\frac{u}{\lambda} + x_0\right) - l\left(\frac{u}{\lambda}\right) \right)$

$$= p(u + \lambda x_0)$$

da $r \geq l\left(\frac{u}{\lambda}\right) - p\left(\frac{u}{\lambda} - x_0\right)$

·) $L_r(u - \lambda x_0) = l(u) - \lambda \cdot r \le l(u) - \lambda \cdot \left(l\left(\frac{u}{\lambda}\right) - p\left(\frac{u}{\lambda} - x_0\right) \right)$

$$= (-\lambda) \left(\frac{-1}{\lambda}\right) \cdot p(u - \lambda x_0) = p(u - \lambda x_0)$$

2. Aussage ist wahr für X/U beliebig: Definiere zunächst

$$A := \{ (V, L_V) : V \text{ UVR von } X,\ U \subseteq V,\ L_V : V \to \mathbb{R} \text{ linear mit } L_V|_U = l,\ L_V(v) \le p(v)\ \forall v \in V \}$$

und $(V, L_V) \le (W, L_W) \Leftrightarrow V \subseteq W,\ L_W|_V = L_V$

Dann ist $\cdot)\ A \neq \emptyset$, da $(U, \ell) \in A$.

$\cdot)$ Für $(V_i, L_{V_i})_{i \in I}$ total geordnet ist

$$\left(V := \bigcup V_i \ , \ L_V(v) = L_{V_i}(v) \ \text{für } v \in V_i \right)$$

eine obere Schranke.

Zornsches Lemma $\Rightarrow \exists$ maximales (X_0, L_{X_0}). Wäre $X_0 \neq X$, so würde es nach Schritt 1 ein (X_1, L_{X_1}) mit

$$(X_0, L_{X_0}) < (X_1, L_{X_1})$$

geben, ein Widerspruch zur Maximalität von (X_0, L_{X_0}). $\blacksquare$

<u>Lemma II.1.7</u> X: $\mathbb{C}$-V.R.

a) $\ell: X \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linear

$$\Rightarrow \tilde{\ell}(x) := \ell(x) - i\,\ell(ix) \text{ ist } \mathbb{C}\text{-linear}$$

b) $h: X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear

$$\Rightarrow \operatorname{Re} h \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear und } \widetilde{\operatorname{Re} h} = h$$

c) $p: X \to \mathbb{R}$ Halbnorm, $\ell: X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ linear

$$\Rightarrow \left(|\ell(x)| \leq p(x) \ \forall x \in X \Leftrightarrow |\operatorname{Re} \ell(x)| \leq p(x) \ \forall x \in X \right)$$

d) X normiert, $\ell: X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear, stetig

$$\Rightarrow \|\ell\| = \|\operatorname{Re} \ell\|$$

<u>Bew.:</u> Übung!

Satz II.1.8 (Hahn-Banach, algebraisch, komplex) X: $\mathbb{C}$-V.R.

$U \leq X$ $\quad p: X \to \mathbb{R}$ sublinear, $\ell: U \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear mit

$$\operatorname{Re} \ell(x) \leq p(x) \quad \forall x \in U$$

$\Rightarrow \exists\ L: X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear mit $L|_U = \ell$,

$$\operatorname{Re} L(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

Bew.: Satz II.1.6 $\leadsto$ $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung L' von $\operatorname{Re} \ell$

$\Rightarrow$ $L(x) := L'(x) - i\, L'(ix)$ hat die gewünschten Eigenschaften nach Lemma II.1.7. $\blacksquare$

Theorem II.1.9 (Hahn-Banach für normierte Räume):

X: normiert, $U \leq X$, $u': U \to \mathbb{K}$, linear und stetig

$\Rightarrow \exists\ x': X \to \mathbb{K}$ stetig, linear mit $x'|_U = u'$, $\|x'\| = \|u'\|$.

Bew.: X reell: $\quad p(x) := \|u'\| \cdot \|x\|$ ist sublinear mit

$$u'(x) \leq |u'(x)| \leq \|u'\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in U$$

$\Rightarrow$ Satz II.1.6 liefert $x': X \to \mathbb{R}$ mit $x'|_U = u'$ und

$$\left.\begin{array}{rl} x'(x) & \leq \|u'\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X \\ -x'(x) = x'(-x) & \leq \|u'\| \cdot \|x\| \quad \text{-''-} \end{array}\right\} \Rightarrow \|x'\| \leq \|u'\|$$

Außerdem: $\|u'\| = \sup\limits_{x \in B_U} |u'(x)| = \sup\limits_{x \in B_U} |x'(x)| \leq \sup\limits_{x \in B_X} |x'(x)| = \|x'\|$

$\Rightarrow \|x'\| = \|u'\|$.

X komplex: analog zu Satz II.1.8 ∎

Def. II.1.10 X: normiert, dann heißt

$$X' := \{x' : X \to \mathbb{K} \mid x' \text{ linear \& stetig}\}$$

der <u>topologische Dualraum</u> von X (ist normiert bzgl. Operatornorm).

Korollar II.1.11: X: normiert $0 \neq x \in X \Rightarrow \exists x \in X$ und $x' \in X'$ mit

$$\|x'\| = 1 \quad \text{und} \quad x'(x) = \|x\|$$

Insbesondere trennt X' die Punkte von X, d.h. zu $x_1 \neq x_2 \in X$ ex. $x' \in X'$ mit $x'(x_1) \neq x'(x_2)$.

Bew.: Setze $u' : \operatorname{span}\{x\} \to \mathbb{K}$ $u'(\lambda x) = \lambda \|x\|$ zu $x' : X \to \mathbb{K}$ mit $\|u'\| = \|x'\|$ fort.

Ist $x_1 \neq x_2$, so ist $x_1 - x_2 \neq 0$ und

$$0 \neq (x_1 - x_2)'(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)'(x_1) - (x_1 - x_2)'(x_2) .$$ ∎

Korollar II.1.12: X: normiert

$$\Rightarrow \|x\| = \sup_{x' \in B_{X'}} |x'(x)| \qquad \forall x \in X$$

Bew.: •) $\|x'\| \leq 1 \;\; \forall x' \in B_{X'} \Rightarrow \left|x'\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \leq 1 \quad \forall x' \in B_{X'}$

$$\Rightarrow |x'(x)| \leq \|x\| \quad \forall x' \in B_{X'}$$

$$\Rightarrow \sup_{x' \in B_{X'}} |x'(x)| \leq \|x\|$$

·) Nach Kor. II.1.11 ex. $x' \in X'$ mit $\|x'\|=1$, $x'(x)=\|x\|$ ■

Zum Schluss dieses Abschnitts einige Anwendungen.

Satz II.1.13: Die Abbildung

$$T: \ell^1 \to (\ell^\infty)', \quad T(x)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$$

ist isometrisch, aber nicht surjektiv.

Bew.:

$$\|T(x)\| = \sup_{y \in B_{\ell^\infty}} |T(x)(y)| = \sup_{y \in B_{\ell^\infty}} \left|\sum x_n y_n\right|$$

$= |\sum x_n| = \|x\|$ für $y \equiv 1$

$\leq \sup|y_n| \, |\sum x_n| = \|x\|$ für $y \in B_{\ell^\infty}$ beliebig

Setze $U := \{x \in \ell^\infty : x \text{ konvergiert}\}$

$\Rightarrow \lim : U \to \mathbb{K}$ ist linear und $\|\lim\| = 1$

$\leadsto \exists \; x' : \ell^\infty \to \mathbb{K}$ mit $\|x'\|=1$, $x'|_U = \lim$

Wäre aber $x'(y) = \sum x_n' \cdot y_n$ für $(x_n')_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, so wäre

nach Konstruktion von x'

$$x_n' = x'(\underbrace{e_n}_{\in U}) = \lim(e_n) = 0,$$ im Widerspruch zu $x' \not\equiv 0$. ■

Satz II.1.14 X: normiert $\Rightarrow \exists$ Banachraum $\overline{X}$ und einen isometrischen Isomorphismus von X auf einen dichten Teilraum von $\overline{X}$.

Bew.: Betrachte $i: X \to (X')'$ $\quad i(x)(x') = x'(x)$.

$\Rightarrow i$ ist normerhaltend:

$$\|i(x)\| = \sup_{x' \in B_{X'}} |i(x)(x')| = \|x\| \quad (\text{Kor. II.1.12})$$

$\Rightarrow i$ ist injektiv

Abschluss in $(X')'$

$\Rightarrow$ setze $\overline{X} := \overline{i(X)}$ $\quad$ und $X \xrightarrow{i} \overline{X}$ $\blacksquare$

Def.: II.1.15 Der Raum $\overline{X}$ aus dem vorigen Satz heißt Vervollständigung von X.

II.2 Trennungssätze:

Zunächst eine wichtigie Klasse sublinearer Abbildungen:

Def. II.2.1 X: V.R. $A \subseteq X$. Dann heißt

$$p_A : X \to [0,\infty] \quad x \mapsto \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda \cdot A\}$$

Minkowskifunktional zu A. Ist $p_A(x) \in [0,\infty[$, so heißt A absorbierend.

Bsp. II.2.2: X: normiert, $A = B_X = \{x : \|x\| \leq 1\}$

$$\Rightarrow p_A(x) = \|x\|.$$

Lemma II.2.3: X: normiert, $U \subseteq X$ konvex, $0 \in \mathrm{int}(U)$

$\Rightarrow$ a) U ist absorbierend und $p_U(x) \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x\|$ falls $\varepsilon \cdot B_X \subseteq U$

b) p_U ist sublinear

c) U offen $\Rightarrow U = p_U^{-1}([0,1[)$

Bew.:

a) $0 \in \mathrm{int}(U) \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \cdot B_X \subseteq U$ und

$$x \in \|x\| \cdot B_X = \frac{\|x\|}{\varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot B_X \subseteq \frac{\|x\|}{\varepsilon} \cdot U$$

b) $p_U(\lambda x) = \lambda p_U(x)$ für $\lambda \geq 0$ ist klar. Für $p_U(x+y) \leq p_U(x) + p_U(y)$

sei $\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow \exists\, \lambda, \mu$ mit

$$x \in \lambda \cdot U, \quad \lambda \leq p_U(x) + \varepsilon, \quad y \in \mu \cdot U \quad \mu \leq p_U(y) + \varepsilon$$

U konvex $\Rightarrow \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{y}{\lambda} = \frac{x+y}{\lambda+\mu} \in U$

$$\Rightarrow p_U(x+y) \leq \lambda+\mu \leq p_U(x) + p_U(y) + 2\varepsilon$$

c) $p_U(x) < 1 \Rightarrow \exists\, \lambda < 1$ mit $x \in \lambda \cdot U \overset{U \text{ konvex}}{\Rightarrow} x = \lambda \cdot \frac{x}{\lambda} + (1-\lambda) 0 \in U$

$p_U(x) \geq 1 \Rightarrow \frac{x}{\lambda} \in X \setminus U \quad \forall \lambda < 1$

$\Rightarrow x = \lim\limits_{\substack{\lambda \to 1 \\ \lambda < 1}} \frac{x}{\lambda} \in X \setminus U$, da $X \setminus U$ abgeschlossen.

Lemma II.2.4 : X: normiert, $V \subseteq X$ konvex, offen und $0 \notin V$.

$\Rightarrow \exists\, x' \in X'$ mit

$$\operatorname{Re} x'(x) < 0 \quad \forall x \in V$$

Bew.: Sei x_0 beliebig, $U := V - x_0 \Rightarrow U$ offen, konvex, $-x_0 \notin U$ und $0 \in U$

$\Rightarrow p_U : X \to \mathbb{R}$ ist sublinear und $p_U(-x_0) \geq 1$ (Lemma II.2.3)

$\rightsquigarrow$ auf $Y = \operatorname{span}\{-x_0\}$ definiere

$$y'(t \cdot (-x_0)) = t \cdot p_U(-x_0)$$

$\Rightarrow \quad y'(y) \leq p_U(y)$, denn es gilt

für $t \leq 0$: $y'(t \cdot (-x_0)) = t \cdot p_U(-x_0) \leq 0 \leq p_U(t \cdot y_0)$

für $t \geq 0$: $y'(t \cdot (-x_0)) = t \cdot p_U(-x_0) = p_U(t \cdot (-x_0))$.

(Hahn-Banach) $\rightsquigarrow$ $\exists$ lineare Fortsetzung $x' : X \to \mathbb{R}$ von y' mit

$$x'(x) \leq p_U(x)$$

und Lemma II.2.3 a) impliziert dass x' stetig ist.

Da $x'(-x_0) = p_U(-x_0) \geq 1$ gilt für $u \in U$

$$x'(u + x_0) = x'(u) - p_U(-x_0) \leq \underset{\text{Lemma II.2.3 c)}}{p_U(u) - 1 < 0}$$

Da jedes $v \in V$ als $u + x_0$ für $u \in U$ geschrieben werden kann folgt die Behauptung. ∎

Theorem (Hahn-Banach, Trennungsversion I) II.2.5:

X: normiert, $V_1, V_2 \subseteq X$ konvex, V_1 offen, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, x' \in X'$ mit

$$\operatorname{Re} x'(v_1) < \operatorname{Re} x'(v_2) \quad \forall\, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$$

Bew.: Setze $V := V_1 - V_2 = \{ v_1 - v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \}$

$$= \bigcup_{v_2 \in V_2} V_1 - v_2$$

$\Rightarrow V$ ist offen, konvex und $0 \notin V$

$\underset{\text{Lemma II.2.4}}{\Rightarrow} \exists\, x' \in X'$ mit $\operatorname{Re} x'(v_1 - v_2) < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} x'(v_1) < \operatorname{Re} x'(v_2)$

für alle $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$. ∎

Theorem II.2.6 (Hahn-Banach, Trennungsversion II)

X: normiert, $V \subseteq X$ abgeschl., konvex, $x \notin V$

$\Rightarrow \exists\ x' \in X'$ mit

$$\operatorname{Re} x'(x) < \inf \{\operatorname{Re} x'(v) : v \in V\}$$

("x und V können strikt getrennt werden")

Bew.: V abgeschl. $\Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ mit $\quad (U_\varepsilon := \{x : \|x\| < \varepsilon\})$

$$x + U_\varepsilon \cap V = \emptyset$$

$\underset{\text{voriges Thm.}}{\Rightarrow} \exists\ x' \in X'$ mit

$$\operatorname{Re} x'(x+u) < \operatorname{Re} x'(v) \quad \forall\, u \in U_\varepsilon, v \in V$$

$\Rightarrow \operatorname{Re} x'(x) + \operatorname{Re} x'(u) < \operatorname{Re} x'(v) \qquad$ -"-

$\Rightarrow \operatorname{Re} x'(x) + \|\operatorname{Re} x'\|\, \varepsilon < \operatorname{Re} x'(v) \qquad$ -"-

$\Rightarrow \operatorname{Re} x'(x) + \underbrace{\|\operatorname{Re} x'\|\, \varepsilon}_{\leq 0} < \inf \{\operatorname{Re} x'(v) : v \in V\}$. ■