I. Normierte Räume und lineare Operatoren

Im Folgenden: Vektorräume sind immer über $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (wenn nicht anders spezifiziert).

I.1 Grundlegende Konzepte & Bsp.

Def. I.1.1: X: Vektorraum, dann heißt $p: X \to \mathbb{R}_+$ **Halbnorm** falls

a) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x \in X \quad (\Rightarrow p(0)=0)$

b) $p(x+y) = p(x) + p(y) \quad \forall x,y \in X$

p heißt **Norm**, falls zusätzlich

c) $p(x)=0 \Rightarrow x=0$

gilt. Das Paar (X,p) heißt dann **(halb-) normierter Raum**.

Häufige Notation: $p = \|\cdot\|$, schreibe also $p(x)$ als $\|x\|$.

Lemma I.1.2: $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum $\Longrightarrow$

$$d_{\|\cdot\|}: X \times X \to \mathbb{R}_+ \quad (x,y) \mapsto \|x-y\|$$

definiert Metrik auf X.

Beweis: Übung!

$\rightsquigarrow$ Begriffe wie konvergente Folge, Cauchy-Folge, offene / abgeschlossene / kompakte Menge, stetige Fktn. sind def.

Beispiel I.13: a) Nachfragen ! (ms $\mathbb{K}^n$)

b) T: Menge, $\ell^\infty(T) :=$ beschränkte Funktionen
(also $\sup\limits_{t\in T} |f(t)| < \infty$ für $t \in \ell^\infty(T)$)

Da
$$\left.\begin{aligned} &\sup_{t\in T} |f(t)+g(t)| \leq \sup_{t\in T} |f(t)| + \sup_{t\in T} |g(t)| \\ &\sup_{t\in T} |\lambda\cdot f(t)| = |\lambda| \sup_{t\in T} |f(t)| \end{aligned}\right\} (*)$$
ist $\ell^\infty(T)$ bzgl.
$$(f+g)(t) := f(t)+g(t)$$
$$(\lambda\cdot f)(t) := \lambda\cdot f(t)$$
ein Vektorraum. Außerdem ist
$$\|f\| := \sup_{t\in T} |f(t)|$$
nach $(*)$ eine Norm auf $\ell^\infty(T)$.

c) $\mathbb{R}[x] = \{ \sum \alpha_n \cdot x^n : \underset{\alpha_n\in\mathbb{K},}{\alpha_n \neq 0}$ für nur endlich viele $n \}$

Ist Vektorraum bzgl
$$\sum \alpha_n \cdot x^n + \sum \beta_n x^n = \sum a_n + \beta_n \, x^n$$
$$\lambda \sum \alpha_n x^n = \sum \lambda \cdot \alpha_n \, x^n$$
und
$$\| \sum a_n x^n \| := \sum |a_n|$$
ist eine Norm hierauf

Lemma I.1.6: a) X: Banachraum U: abgeschl. UVR

$\Rightarrow$ U Banachraum

b) X: normiert, $U \subseteq X$ vollständig $\Rightarrow$ U abgeschlossen

Bew. Übung.

Bsp. I.1.7: T: metrischer Raum

also $\sup\{|x(t)|\} < \infty$

$$C^b(T) = \{x : T \to \mathbb{K} : x \overset{\text{(stetig u.}}{\text{beschränkt}}\}$$

Frage: was steht hier für $T = \mathbb{N}$?

ist normierter Raum bzgl. $\|x\|_\infty := \sup_{t\in T} |x(t)|$.

$C^b(T)$ sogar ein Banachraum:

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^b(T)$

z.Z.: $x_n \to y \in C^b(T)$.

$\forall\, t \in T$ gilt:

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq \sup_{t\in T} |x_n(t) - x_m(t)| = \|x_n - x_m\|$$

$\Rightarrow$ $x_n(t)$ ist C.-F. und konverg. Setze $y(t) := \lim_{n\to\infty} x_n(t)$

.) y beschränkt: $\|y(t)\| = \|y(t) - x_m(t) + x_m(t)\|$

$\leq \|y(t) - x_m(t)\| + \|x_m(t)\| \leq \varepsilon + \|x\| < \infty$

für $m \geq N_\varepsilon$

.) y stetig (aus Ana I bekannt)

Vollständigkeit

a) Eine Metrik auf einem Vektorraum heißt invariant falls $d(x,y) = d(x-z, y-z)$ für alle x,y,z.

Def. I.1.4 b) Ein metr. Raum heißt vollständig wenn jede Cauchy-Folge konvergiert

c) Ist $(X, \|\cdot\|)$ normiert und X vollständig bzgl. $d_{\|\cdot\|}$, so heißt $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum.

Bsp. I.1.5: $(\ell^\infty(T), \sup)$ ist ein Banachraum:

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, also

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \ \forall n,m \geq N$$

z.Z.: $\exists y$ mit $x_n \to y$

Für $s \in T$ gilt $|x_n(s) - x_m(s)| \leq \sup_{t\in T} |x_n(t) - x_m(t)| \leq d(x_n, x_m)$,

also ist $(x_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

Setze $y(s) := \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n(s)$

z.Z.: $\|y\| < \infty$ und $x_n \to y$. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig und $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon \ \forall n,m \geq N$

Für $s \in T$ ex. dann $m_0 = m_0(s,\varepsilon) \geq N$, so dass

$$|x_{m_0}(s) - y(s)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x_n(s) - y(s)| \leq |x_n(s) - x_{m_0}(s)| + |x_{m_0}(s) - y(s)|$$

$$< 2\varepsilon \quad \text{falls } n \geq N.$$

$$\Rightarrow |y(s)| \leq |y(s) - x_N(s)| + |x_N(s)| \leq 2\varepsilon + \|x_N\| < \infty$$

, also y beschränkt und auch $x_n \to y$.

Bsp. II.8: $C^1([a,b],\mathbb{R}) := \{f: [a,1] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig diff'bar}\}$

ist normiert bzgl.

$$\|x\|_1 := \sup_{t\in T} |x(t)|$$

$$\|x\|_2 := \sup_{t\in T} |x(t)| + \sup_{t\in T} |x'(t)|$$

(vgl. Ana I, Aufg. T4)

Frage: Ist $C^1([a,b],\mathbb{R})$ vollständig?

·) bzgl. $\|\cdot\|_1$: nein, da es glm. konvergente diff'bare Fktn. $x_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt mit $x_n \to |\cdot|$ (in $\|\cdot\|_1$)

·) bzgl. $\|\cdot\|_2$: ja

– $\|x_n\|_2 \geq \|x_n\|_\infty \Rightarrow$ jede C.F. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. glm. gegen $x: [0,1] \to \mathbb{R}$

$\|x_n\|_2 \geq \|x_n'\|_\infty \Rightarrow$ $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konv. glm. gegen $y: [0,1] \to \mathbb{R}$ (stetig)

Beh.: x diff'bar und $x' = y$. Sei also $t \in \mathbb{R}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Nach dem Mittelwertsatz ex. für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge $(h_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\frac{1}{\overset{h'^{m}}{h_n}} \left(x_m(t+h_n) - x_m(t)\right) = x_m'(t+h_n'^{m})$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n}\left(x(t+h_n)-x(t)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n}\left(\lim_{m\to\infty} x_m(t+h_n) - \lim_{m\to\infty} x_m(t)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{h_n}\left(x_m(t+h_n)-x_m(t)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} x_m'(t+h_n'^{m})$$

$$\overset{\nabla}{\overset{!}{=}} \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} x_m'(t+h_n'^{m}) = \lim_{m\to\infty} x_m'(t) = y(t)$$

(vgl. Heuser "Lehrbuch der Analysis I" § 104)

I.2: Klassische Funktionenräume: L^p-Räume

Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Lemma I.2.1: $\forall\ 0 \le x,y,\ 0 < r < 1$ gilt

$$x^r \cdot y^{1-r} \le r \cdot x + (1-r)y$$

(x oder y = 0: klar.)

Bew.: log ist konvex (Ana II Ü1), also gilt

$$\log(x^r y^{1-r}) = r \cdot \log(x) + (1-r)\log(y) \le \log(r \cdot x + (1-r)y)$$

Da e^x monoton ist und $e^{\log(x)} = x$ folgt die Beh. ▨

auch für $x,y > 0$

Def I.2.2: (I, σ, μ): Maßraum (also I Menge, $\sigma \subseteq \mathcal{P}(I)$ eine σ-Algebra, $\mu : \sigma \to [0,\infty]$ ein Maß), dann setze für $1 \le p < \infty$

$$\mathcal{L}^p(I,\mu) := \left\{ x : I \to \mathbb{C} : f \text{ messbar}, \int_I |x|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

und für $x \in \mathcal{L}^p(I,\mu)$ setze $\|x\|_p := \left(\int |x|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$.

Frage: Ist dies eine (Halb-)Norm?

(wenn nicht anders erwähnt ist im Folgenden immer $1 \le p < \infty$ vorausgesetzt)

Satz I.2.3 (Hölder-Ungleichung):

$$x \in \mathcal{L}^p(I,\mu),\ y \in \mathcal{L}^q(I,\mu) \overset{p,q>1}{\vee} \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \quad xy \in \mathcal{L}^q(I,\mu)$$

$$\Rightarrow \quad \|x \cdot y\|_1 \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

Bew.: o.B.d.A $\|x\|_p \neq 0,\ \|y\|_q \neq 0$

Lemma I.2.2 mit $r = \frac{1}{p}$

$$\frac{|x(t)\cdot y(t)|}{\|x\|_p \|y\|_q} = \left(\frac{|x(t)|^p}{(\|x\|_p)^p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|y(t)|^q}{(\|y\|_q)^q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{|x(t)|^p}{(\|x\|_p)^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|y(t)|^q}{(\|y\|_q)^q}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \cdot \int_I |x| \cdot |y| \, d\mu \leq \frac{1}{p(\|x\|_p)^p} \cdot \|x\|_p^{\,p} + \frac{1}{q(\|y\|_q)^q} \cdot \|x\|_q^{\,q} = 1 \quad ■$$

Korollar I.2.7 (Minkowski-Ungleichung)

$$x, y \in \mathcal{L}^p(I,\mu)$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Bew.: $p=1$ ist klar. Für $p>1$ gilt:

$$(\|x+y\|_p)^p = \int_I |x+y|^p \, d\mu = \int_I |x+y|\,|x+y|^{p-1} \, d\mu$$

$$\leq \int_I |x|\,|x+y|^{p-1} \, d\mu + \int_I |y|\,|x+y|^{p-1} \, d\mu$$

$$\leq \|x\|_p \, \| \, |x+y|^{p-1} \|_q + \|y\|_p \, \| \, |x+y|^{p-1} \|_q$$

$$= \|x\|_p + \|y\|_p \left(\|x+y\|_p \right)^{p-1} \qquad ▨$$

<u>Korollar I.2.8:</u> $\left(\mathcal{L}^p(I,\mu), \|\cdot\|_p\right)$ ist halbnormiert.

<u>Def. I.2.9:</u> Für einen Maßraum (I, σ, μ) setze

$$N(I,\mu) := \{ x : I \to \mathbb{K} : x(t) = 0 \text{ fast überall} \},$$

$$L^p(I,\mu) := \mathcal{L}^p(I,\mu) / N(I,\mu)$$

und

$$\|x + N(I,\mu)\|_p := \|x\|_p .$$

Wir wollen nun zeigen, dass $L^p(I,\mu)$ in der Tat ein Banachraum ist. Dazu zeigen wir zunächst:

<u>Lemma I.2.10:</u> Für $(X, \|\cdot\|)$ halbnormiert sind äquivalent:

a) X ist vollständig

b) Jede <u>absolut</u> konvergente Reihe konvergiert (genauer: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ ex. $x \in X$ mit $\lim_{N\to\infty} \|x - \sum_{x=1}^{N} x_n\| = 0$)

Beweis: a) $\Rightarrow$ b), da $\sum_{n=1}^{N} x_n$ eine Cauchyfolge ist

b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine C.F. z.Z.: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert

Sei $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$$

setze $y_k := x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$

$\Rightarrow$ ex. y mit

$$\|y - \sum_{k=1}^{K} y_k\| = \|y - (x_{n_{K+1}} - x_{n_1})\| \to 0$$

$\Rightarrow$ ex. konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

$\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (da C.F.). ▨

Satz I.2.11: Für $p \geq 1$ ist $L^p(I,\mu)$ ein Banachraum!

Bew.: Norm: $\int_I |x|^p d\mu = 0 \Rightarrow |x|^p = 0$ auf jeder Menge mit Maß > 0

(nach Lemma I.2.10) $\Rightarrow |x| = 0$ fast überall $\Rightarrow x \in N(I,\mu)$

Vollständigkeit: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$

setze $\hat{y}(t) := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t)| \in [0,\infty]$

$\Rightarrow$ $\hat{Y}$ ist integrierbar und

$$\int_I \hat{Y}^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_I \left(\sum_{i=1}^n |x_i(t)| \right)^p d\mu$$

(Satz von der monotonen Konvergenz, Ana3, Satz 11.6.1)

$$\le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \int_I |x_i|^p d\mu \underbrace{=}_{\text{(Ana 3, Bem. 11.5.7)}} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \|x_i\|_p < \infty$$

$\Rightarrow$ $\hat{Y}$ fast überall endlich, also $Y(I \setminus N) \subseteq [0,\infty[$ für $N \subseteq I$ Nullmenge

existiert, da $\sum |x_i(t)|$ existiert

$\rightsquigarrow$ setze $y(t) := \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) & \text{falls } t \notin N \\ 0 & \text{falls } t \in N \end{cases}$

Zeige nun: a) $y \in \mathcal{L}^p(I,\mu)$, b) $\|y - \sum_{i=1}^n x_i\| \to 0$

a) $\int_I y^p d\mu \le \int_I \hat{Y}^p d\mu < \infty \Rightarrow y \in \mathcal{L}^p(I,\mu)$

b)

$$\int_I \left(y - \sum_{i=1}^n x_i\right)^p d\mu = \int_I \left(\sum_{i=n}^{\infty} x_i\right)^p d\mu$$

$$\le \int_I \hat{Y}^p d\mu$$

(dominierte Konvergenz, Ana3 Satz 11.6.5)

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|y - \sum_{i=1}^n x_i\right| \in \mathcal{L}^p$ und $\underbrace{\int_I \lim_{n\to\infty} y - \sum_{i=1}^n x_i \, d\mu}_{=0} = \lim_{n\to\infty} \int_I y - \sum_{i=1}^n x_i \, d\mu$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|y - \sum_{i=1}^n x_i\| = 0$ ■

Bem. I.2.12: Für $\underline{I} = \mathbb{N}$ und $\mu =$ Zählmaß erhalten wir

- $\mathcal{N}(\mathbb{N}, \mu) = \{0\}$ $\left(\Rightarrow L^p(\mathbb{N}, \mu) = \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mu) \right)$

- $L^p(\mathbb{N}, \mu) \cong \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$

Diese Räume werden auch mit $\ell^p(\mathbb{K})$ (oder ℓ^p) bezeichnet.

I.3 Lineare Operatoren

Frage: Was wollen wir als "Strukturerhaltende Abbildungen" von normierten Räumen nehmen?

→ Was nimmt man in endlichen Dimensionen $X = \mathbb{R}^n$?

→ warum ist linear + normerhaltend schlecht?

→ andere bekannte Beispiele?

Def. I.3.1: Eine stetige lineare Abbildung $T: X \to Y$ zwischen normierten Räumen heißt stetiger (oder auch beschränkter) Operator.

Satz I.3.2: Für X, Y normiert, $T: X \to Y$ linear sind äquivalent:

i) T ist stetig (auf ganz X)

ii) T ist stetig in einem beliebigen Punkt $x \in X$

iii) Ex. $M \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq M \|x\| \; \forall x \in X$

iv) T ist gleichmäßig stetig

Achtung! Normen immer dort nehmen, wo sie definiert sind (also z.B. für $\|Tx\|$ die Norm auf Y).

Bew.: iii) $\Rightarrow$ iv):

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x-x_0)\| \leq M \;\|x-x_0\|$$

$\Rightarrow$ $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ erfüllt Bed. für glm. Stetigkeit

iv) $\Rightarrow$ i) $\Rightarrow$ ii) : klar

ii) $\Rightarrow$ iii) : Widerspruchsbeweis: Sei T in x_0 stetig und iii) gelte nicht

ex. $\forall n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $\|T(x_n-x_0)\| > n \|x_n - x_0\|$

$\rightsquigarrow$ setze $y_n = \dfrac{x_n - x_0}{n \cdot \|x_n - x_0\|} + x_0$ $\quad (\Rightarrow y_n \to x_0)$

aber $\|T(y_n - x_0)\| = \dfrac{\|T(x-x_0)\|}{n\|x-x_0\|} > 1$

$\Rightarrow \|Ty_n - Tx_0\| > 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow Ty_n \not\to Tx_0$ ↯

▨

Def. I.3.3: Für X, Y normiert, $T: X \to Y$ linear setze

$$\|T\| := \inf\left\{ M \geq 0 : \|Tx\| \leq M \;\|x\| \;\; \forall x \in X \right\}$$

(n.b.: $\inf \emptyset := \infty$). Dies ist die Operatornorm von T.

Auf $\mathrm{Lin}(X,Y) := \{ T: X \to Y \;:\; T \text{ ist linear} \}$ definiere

$$\begin{cases} (S+T)(x) := S(x) + T(x) \\ (\lambda S)(x) := \lambda \cdot S(x) \end{cases}$$

Ferner setze $L(X,Y) := \{ T \in \mathrm{Lin}(X,Y) : T \text{ ist stetig} \}$
$= \{ T \in \mathrm{Lin}(X,Y) : \|T\| < \infty \}$

Satz I.3.4

a) $\| T \| = \sup \{ \|Tx\| : \|x\| \leq 1 \} = \sup \{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0 \}$

b) $(L(X,Y), \|\cdot\|)$ ist normiert

c) Y vollständig $\Rightarrow (L(X,Y), \|\cdot\|)$ vollständig

Bew.: a) + b) Übung

c) $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ C.F. in $L(X,Y) \Rightarrow \forall x \in X$ ist $(T_n . x)_{n \in \mathbb{N}}$ C.F. in Y, da

$$\| T_n . x - T_m . x \| \leq \| T_n - T_m \| \, \|x\|$$

nun setze $Sx = \lim_{n \to \infty} T_n . x$

•) S ist linear:

$$S(\lambda x + y) = \lim_{n \to \infty} T_n(\lambda x + y) = \lim_{n \to \infty} \lambda T_n x + T_n y$$

$$= \lambda \lim_{n \to \infty} T_n x + \lim_{n \to \infty} T_n y = \lambda Sx + Sy$$

•) $\|T\| < \infty$ und $\|T - T_n\| \to 0$:

Für $\varepsilon > 0$ wähle n_0 mit $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ und
für x mit $\|x\| \leq 1$ wähle $m_0 \geq n_0$ mit $\|T_{m_0} x - Tx\| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \| T_n x - Tx \| \leq \| T_n x - T_{m_0} x \| + \| T_{m_0} x - Tx \|$$

(*)

$$\leq \| T_n - T_{m_0} \| + \varepsilon \leq 2 \varepsilon$$

$\Rightarrow \|Tx\| \leq \|Tx - T_n x\| + \|T_n x\| \leq 2\varepsilon + \|T_n\|$

$\Rightarrow \|T\| < \infty$ und $(*)$ zeigt außerdem $\|T - T_n\| \to 0$ ▨

__Bemerkung I.3.5__ Mit den Bezeichnungen

$$B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$
$$S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

sieht man, dass die Konvergenz $T_n \to T$ in der Operatornorm äquivalent zur __gleichmäßigen__ Konvergenz von von T_n gegen T auf B_X (oder auch S_X) ist.

__Def. I.3.6__ Eine Teilmenge D in einem metrischen Raum X heißt __dicht__, falls für jedes $x \in X$

$$x = \lim_{n\to\infty} y_n$$

für eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ __in D__ gilt.

__Satz I.3.7__ X: normiert, $D \subseteq X$ dichter Untervektorraum, Y: Banachraum, $T \in L(D, X)$

$\Rightarrow \exists$ genau ein $\hat{T} : X \to Y$ linear & stetig mit $\hat{T}|_D = T$.
Außerdem gilt $\|\hat{T}\| = \|T\|$

__Bew.:__ Konstruktion von $\hat{T}$: für $x \in X$ wähle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $x_n \to x$

$$\hat{T}.x := \lim_{n\to\infty} T.x_n$$

C.F. ✓

(da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C.F. und $\|Tx_n - T.x_m\| \leq \|T\| \, \|x_n - x_m\|$ ist $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Wohldefiniertheit: gilt außerdem $x = \lim_{n\to\infty} \hat{x}_n$, so gilt

$$\|T\hat{x}_n - Tx\| = \|T\hat{x}_n - Tx_n + Tx_n - Tx\|$$
$$\le \|T\| \; \|\hat{x}_n - x_n\| + \|Tx_n - Tx\| \to 0$$

Linearität: $\lambda x_n + y_n \to \lambda x + y$ in X, also gilt

$$\overline{T}(\lambda x+y) = T \lim_{n\to\infty} (\lambda x_n + y_n) = \lambda \lim Tx_n + Ty_n = \lambda \overline{T}x + \overline{T}y$$

Eindeutigkeit: für jede andere stetige lineare Fortsetzung $\hat{S}$ gilt: $Sx = \lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} \overline{T}x_n = \overline{T}x$ (für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben).

Norm:

∘) $\|T\| \le \|\hat{T}\|$ ist klar

∘) wäre $\|T\| < \|\hat{T}\|$, dann gäbe es $x \in S_X$ mit

$$\|\hat{T}x\| > \|T\| \qquad (\Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ mit } x_n \in S_X)$$
$$\shortparallel$$
$$\|\lim_{n\to\infty} Tx_n\| \le \|T\| \quad ↯ \; .$$

▨

<u>Lemma I.3.8</u> X, Y, Z normiert, $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$

$$\Rightarrow S \circ T \in L(X,Z) \text{ und } \|S \circ T\| \le \|S\| \, \|T\|$$

<u>Bew.:</u> Für alle $x \in X$ gilt

$$\|S(T x)\| \le \|S\| \, \|T x\| \le \|S\| \, \|T\| \, \|x\|$$

$\Rightarrow \|S \circ T\| \le \|S\| \cdot \|T\|$, insbes. $\|S \circ T\| < \infty$. ▨

Bsp. I.3.9: X, Y normiert, $\dim X < \infty \Rightarrow$ jede lin. Abb. $T: X \to Y$ ist beschränkt:

Schreibe $x \in X \cong \mathbb{K}^n$ als $x = \sum \alpha_i e_i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

Dann ex. $M \geq 0$ mit $\sum |\alpha_i| \leq M \cdot \|x\|$ (Ana 1, Ü S7) und es gilt

$$\|Tx\| = \|T \sum \alpha_i e_i\| = \|\sum \alpha_i T e_i\| \leq \sum |\alpha_i| \, \|Te_i\|$$

$$\leq \sum |\alpha_i| \cdot \max \|Te_i\|$$

$$\leq \|x\| \cdot \underbrace{M \cdot \max \|Te_i\|}_{\text{obere Schranke für } \|T\|}$$

Bsp. I.3.10: $T: (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{K} \quad x \mapsto x(0)$

- $|Tx| = |x(0)| \leq \sup\{|x(t)| : t \in [0,1]\} = \|x\|_\infty$

  $\Rightarrow \|T\| \leq 1$

- $x =$ konstante Einsfunktion hat $|Tx| = 1 \cdot \|x\|_\infty$

  $\Rightarrow \|T\| \geq 1$

Also gilt $\|T\| = 1$.

Bsp. I.3.11: $T: (C^1([0,1]) \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]) \|\cdot\|_\infty)$

$x \mapsto x'$ ist linear aber unbeschränkt:

Für $x_n := (t \mapsto t^n)$ gilt $\|x_n\|_\infty = 1$ und $\|x_n'\|_\infty = n$.

Versieht man $C^1([0,1])$ jedoch mit der Norm

$$\|x\| := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty \text{, so wird } T(x) := x' \text{ stetig.}$$

Die Norm $\|\cdot\|$ heißt auch Graphennorm des Operators T. (Insbesondere sieht man so auch, dass $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|$ nicht äquivalent sein können, vgl. Ana 1, Ü F4).

Bsp. I.3.12: (*)   Bem. I.3.13: (**)

Bsp. I.3.14: $T : C([0,1]) \to \mathbb{K} \quad x \mapsto \int_0^1 x(t)\,dt$

- $x \equiv 1 \Rightarrow \|x\| = 1, \|Tx\| = |\int_0^1 1\,dt| = 1 \Rightarrow \|T\| \geq 1$
- $x \leq 1 \Rightarrow \int_0^1 x(t)\,dt \leq 1 \Rightarrow \|T\| \leq 1$

$\Rightarrow \|T\| = 1$

Ist $Y := \{x \in C([0,1]) : x(1) = 0\}$ und $S = T|_Y$, so gilt ebenfalls $\|S\| = 1$ (betrachte $x_n = 1 - t^n$).

Es kann aber nicht $x \in Y$, $\|x\| = 1$ und $\|Sx\| = 1$ gelten, da dann $x \neq 1$ nur auf einer Nullmenge gelten darf und somit $x = 1$ (da x stetig) gelten müßte. Das Supremum in Satz I.3.4 a) muss also nicht angenommen werden.

(*) (Bsp. I.3.12): Es sei

$$D := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K},\ x_n \neq 0 \text{ nur für endlich viele } n\}$$

Dann ist $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} n\cdot x_n$ unbeschränkt

- bzgl $\|\cdot\|_\infty$, da für $e_m = (0,\dots,\overset{\substack{m\text{-te Stelle}\\ \downarrow}}{1},\dots)$

$$\|e_m\| = 1 \quad \text{aber} \quad |T e_m| = m \quad \text{gilt}$$

- bzgl $\|\cdot\|_p$ aus dem selben Grund.

(**)

Bem I.3.13: Die Räume in den vorigen beiden Bsp. waren nicht vollständig. Um unbeschränkte Operatoren auf Banachräumen anzugeben braucht man z.B. das Auswahlaxiom (Übung).

Bsp. I.3.15: Sei $k:[0,1]^2 \to \mathbb{K}$ stetig

$\leadsto T_k : C[0,1] \to C[0,1]$ $\quad T_k(x)(s) := \int_0^1 k(s,t)\,x(t)\,dt$

Dann ist T_k

·) wohldefiniert (also $T_k(x)$ stetig): Sei $\varepsilon > 0$

$$k \text{ glm. stetig} \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : \|(s,t)-(s',t')\| < \delta \Rightarrow |k(s,t) - k(s',t')| < \frac{\varepsilon}{\|x\|_\infty}$$

Also gilt

$$|s-s'| < \ \Rightarrow |T_k(x)(s) - T_k(x)(s')| \leq \int_0^1 |k(s,t) - k(s',t)|\,|x(t)|\,dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\|x\|_\infty} \int_0^1 |x|\,dt \leq \varepsilon$$

(Bem.: Argument zeigt, dass sogar $T_k(x)$ stetig ist für $x \in L^1[0,1]$)

◦) stetig, da

$$\|T_k\| = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|T_k x\|_\infty$$

$$= \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \sup_{s \in [0,1]} |T_k(x)(s)|$$

$$= \sup_{s \in [0,1]} \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} |T_k(x)(s)|$$

$$= \sup_{s \in [0,1]} \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \left| \int_0^1 k(s,t)\, x(t)\, dt \right|$$

$$\leq \|k\|_\infty$$

Def. I.3.16 Der Operator T_k aus dem vorigen Bsp. heißt *Fredholmscher Integraloperator* und k heißt sein *Kern*.

I.4 Eigenschaften normierter Räume

Satz I.4.1 $(X, \|\cdot\|)$ normiert $\Rightarrow$

a) $x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$

b) $x_n \to x$ und $y_n \to y \Rightarrow x_n + y_n \to x + y$ (Addition ist stetig)

c) $x_n \to x$ und $\lambda_n \to \lambda$ in $\mathbb{K} \Rightarrow \lambda_n x_n \to \lambda x$ (Skalarmult. -"-)

d) $x_n \to x \Longrightarrow \|x_n\| \to \|x\|$ (Norm ist stetig)

Bew.:

a) Nach Definition

b) $\| x_n + y_n - (x+y) \| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$

c) $$\| \lambda_n x_n - \lambda x \| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n x\| + \|\lambda_n x - \lambda x\|$$
$$= |\lambda_n| \, \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \, \|x\| \to 0$$

d) $$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$$

Folgt aus $\|x\| - \|y\| \leq \big(\|x-y\| + \|y\| \big) - \|y\| = \|x-y\|$
und $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$ (symmetrisch).

$$\Rightarrow \big| \|x_n\| - \|x\| \big| \leq \|x_n - x\| \to 0$$

Korollar I.4.2: $(X, \|\cdot\|)$ normiert, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge

$\Rightarrow \|x_n\|_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge

Bew.: Stetige Abbildungen bilden Cauchy-Folgen auf solche ab (wenn nicht bekannt als Übung nachrechnen).

Korollar I.4.3 : $U \overset{\text{Untervektorraum (UVR)}}{\le} X$, $(X, \|\cdot\|)$ normiert

$\Longrightarrow \overline{U}$ (Abschluss) ist ebenfall UVR.

Bew.: $x, y \in \overline{U} \Longleftrightarrow$ ex. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n \to x, \quad y_n \to y$$

$\Longrightarrow x_n + y_n \to x+y$ mit $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in U

$\Longrightarrow x+y \in \overline{U}$ (analog mit Skalarmult.)

Def. I.4.4 Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf dem selben VR X heißen äquivalent wenn es $0 < m \le M$ gibt mit

$$m\,\|x\| \le |||x||| \le M\,\|x\| \quad \forall x \in X.$$

Satz I.4.5 Für zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf X sind äquivalent:

1) $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ sind äquivalente Normen

2) Eine Folge konvergiert bzgl $\|\cdot\|$ genau dann, wenn sie bzgl $|||\cdot|||$ konvergiert und die Grenzwert sind gleich

3) Eine Folge ist Nullfolge bzgl. $\|\cdot\|$ genau dann wenn sie eine bzgl. $|||\cdot|||$ ist

4) $id : (X, \|\cdot\|) \to (X, |||\cdot|||)$ und $\widetilde{id} : (X, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$ sind beschränkt.

Beweis: 1) $\Rightarrow$ 2) 2) $\Rightarrow$ 3) sind trivial.

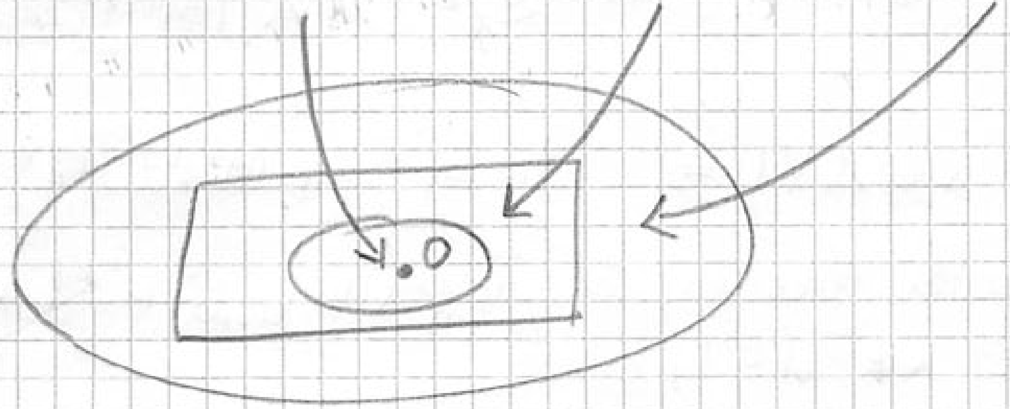
3) $\Rightarrow$ 4) : Satz I.3.2

4) $\Rightarrow$ 1) : setze $M = \|\widetilde{id}\|$ und $m = \frac{1}{\|id\|}$.

Insbesondere ist $T: X \to Y$ genau dann bzgl. $\|\cdot\|$ stetig falls T bzgl $|||\cdot|||$ stetig ist.

Geometrische Interpretation:

$$\{x : \|x\| \le \tfrac{1}{M}\} \subseteq \{x : |||x||| \le 1\} \subseteq \{x : \|x\| \le \tfrac{1}{m}\}$$



Bsp. I.4.6 a) Auf dem $\mathbb{K}^n$ sind alle Normen äquivalent (Ana 1, Ü59)

b) Auf $C^1([a,b],\mathbb{R})$ können

$$\|x\| := \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|$$

$$|||x||| := \sup_{t\in[a,b]} |x(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |x'(t)|$$

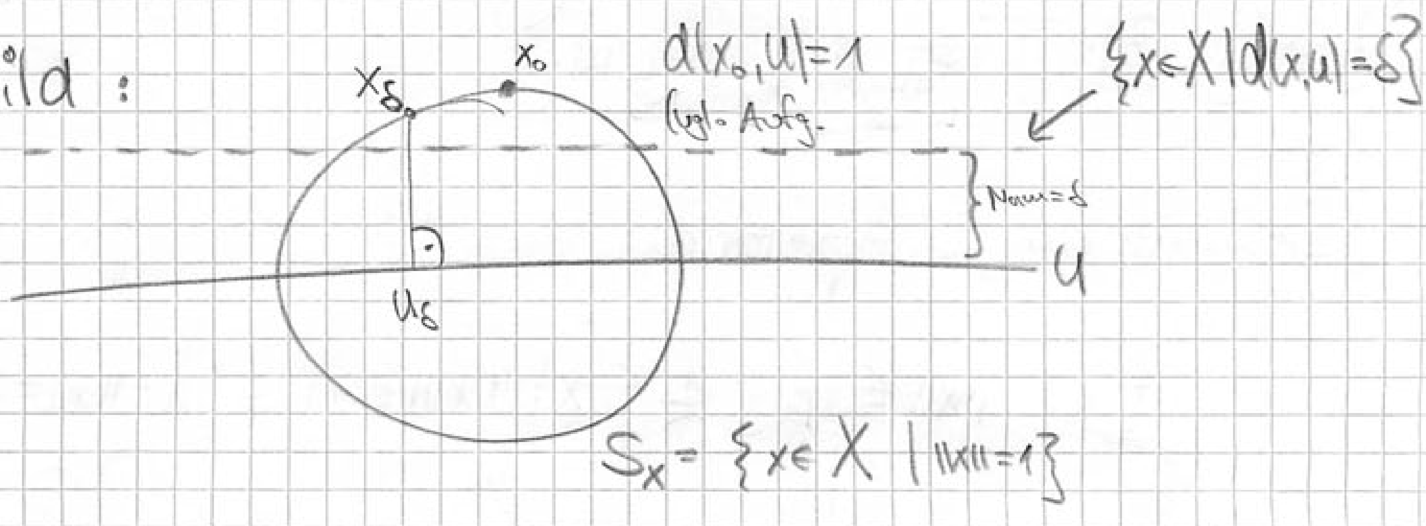
nicht äquivalent sein (Bsp. I.1.8 und Bsp. I.3.11)

Lemma I. 4.7 (Rieszsches Lemma) X normiert, $U \subsetneqq X$ abgeschlossen, $0<\delta<1$

$\Rightarrow$ ex. $x_\delta \in X$ mit $\|x_\delta\|=1$ und

$$\|x_\delta - u\| > 1-\delta \quad \forall u \in U$$

Bild :



Bew.: $\quad x \in X \setminus U \Rightarrow \quad d := \inf\{\|x-u\| : u \in U\} > 0$

(ansonsten gäbe es eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U mit $u_n \to x$, aber $x \notin \overline{U} = U$)

$$\Rightarrow \quad d < \frac{d}{1-\delta} \Rightarrow \text{ ex. } u_\delta \in U \text{ mit}$$

$$\|x-u_\delta\| < \frac{d}{1-\delta}.$$

$\rightsquigarrow$ setze $\quad x_\delta := \dfrac{x-u_\delta}{\|x-u_\delta\|} \quad \Rightarrow \|x_\delta\| = 1$

Für $u \in U$ beliebig gilt nun

$$\|x_\delta - u\| = \left\| \frac{x}{\|x-u_\delta\|} - \frac{u_\delta}{\|x-u_\delta\|} - u \right\| = \frac{1}{\|x-u_\delta\|} \|x - \underbrace{u_\delta - \|x-u_\delta\| u}_{\in U}\|$$

$$\geq \frac{d}{\|x-u_\delta\|} > 1-\delta .$$

▨

Satz I.4.8 Für X normiert sind äquivalent:

i) $\dim X < \infty$

ii) $B_X = \{ x \in X : \|x\| \leq 1 \}$ ist kompakt

iii) Jede beschränkte Folge hat konv. Teilfolge

Bew.: i) $\Rightarrow$ ii) : Heine-Borel

ii) $\Rightarrow$ iii) : In einem kompakten metrischen Raum hat jede Folge eine konvergente Teilfolge

iii) $\Rightarrow$ i) : Widerspruchsbeweis:

Sei $\dim X = \infty$. Wähle x_1 mit $\|x\|_1$ beliebig.

Rieszsches Lemma mit $U = \operatorname{span}\{x_1\}$

$\Rightarrow$ ex. $x_2 \in X$ mit $\|x_2\| = 1$, $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$

$U = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$

$\Rightarrow$ ex. $x_3 \in X$ mit $\|x_3\| = 1$, $\|x_2 - x_3\| \geq \frac{1}{2}$

$\vdots$ $\|x_1 - x_3\| \geq \frac{1}{2}$

$U = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$

$\Rightarrow$ ex. $x_n \in X$ mit $\|x_n\| = 1$, $\|x_i - x_n\| \geq \frac{1}{2}$ $1 \leq i < n$

$\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, hat aber keine konvergente Teilfolge.

▨

Def. I.4.9: Ein metrischer Raum heißt separabel, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Lemma I.4.10: Für X normiert sind äquivalent

i) X ist separabel

ii) Es gibt eine abzählbare Menge A mit $\overline{\operatorname{span} A} = X$

Bew.: i) $\Rightarrow$ ii) klar.

ii) $\Rightarrow$ i): sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Setze

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i : N \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{Q}, x_i \in A \right\}$$

$\Rightarrow B$ ist abzählbar und man sieht $\overline{B} = X$ wie folgt:

Zeige: $\forall x \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, y \in B : \|x - y\| < \varepsilon$

Seien $x \in X$ $\varepsilon > 0$ fix. Da $\overline{\operatorname{span} A} = X$ ex. $y_0 \in \operatorname{span} A$

mit $\|x - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$y_0 \in \operatorname{span} A \Rightarrow y = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i$$

$$\Rightarrow \text{ex. } \lambda_i' \in \mathbb{Q} \text{ mit } |\lambda_i - \lambda_i'| \leq \frac{\varepsilon}{2 \sum_{i=1}^{N} \|x_i\|},$$

$$\text{setze } y := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i' \cdot x_i$$

$$\Rightarrow \|x - y\| \leq \|x - y_0\| + \|y_0 - y\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\max|\lambda_i - \lambda| \sum \|x_i\|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon.$$

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ verwende $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ anstelle von $\mathbb{Q}$. ▨

Bsp. I.4.11: a) ℓ^p ist separabel (für $p \le 1 < \infty$)

$A = \{e_n = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow\ n\text{-te Stelle}}{1}, 0, \dots) \in \ell^p\}$ erfüllt $\overline{\operatorname{span} A} = \ell^p$:

Für $x = (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ gilt nämlich

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} t_i e_i \right\| = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |t_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

b) $\ell^\infty = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \text{ ist beschränkt}\}$ ist <u>nicht</u> separabel:

Für $M \subseteq \mathbb{N}$ sei $\chi_M : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta := \{\chi_M : M \subseteq \mathbb{N}\}$ ist überabzählbar

und $\| \chi_M - \chi_{M'} \|_\infty = 1$ falls $M \neq M'$

A abzählbar $x \in A$

$$\Rightarrow \left| \{ y \in \ell^\infty : \| x - y \|_\infty \le \tfrac{1}{4} \} \cap \Delta \right| = 1$$

$\Rightarrow$ A kann nicht dicht sein.

Def. I.4.12 X: normiert, $A \subseteq X$. Dann heißt

$$d(x,A) := \inf\{\|x-y\| : y \in A\} = \inf\{\|y\| : x-y \in A\}$$

der Abstand von x zu A. (Infimum über alle Repräsentanten)

Lemma I.4.13: $d(x,A)=0 \iff x \in \overline{A}$

Bew.: Klar

Satz I.4.13: X: normiert, $U \leq X$, $[x] := x+U \in X/U$.

a) $\|[x]\| := d(x,U)$ ist eine Halbnorm auf X/U

b) U abgeschlossen $\iff$ $\|\circ\|$ ist Norm

c) X vollständig, U abgeschl $\Rightarrow$ X/U vollständig

Bew.: a) $d(x+u, U) = d(x,U)$ $\forall u \in U \Rightarrow \|\circ\|$ ist wohldef.

Halbnormeigenschaft:

- $\|\lambda \circ [x]\| = |\lambda| \, \|[x]\|$ $\to$ für $\lambda = 0$ trivial
  $\to$ für $\lambda \neq 0$:

$$\inf\{\|\lambda x - y\| : y \in A\} = \inf\{\|\lambda x - \lambda y\| : y \in A\}$$

- Dreiecksungl.: seien $x_1, x_2 \in X$, $\varepsilon > 0$ beliebig

wähle $u_1, u_2 \in U$ mit $\|x_i - u_i\| \leq \|[x_i]\| + \varepsilon$

$$\Rightarrow \|[x_1] + [x_2]\| = \|[x_1 + x_2]\| \leq \|(x_1+x_2) - (u_1+u_2)\|$$

$$\leq \|x_1 - u_1\| + \|x_2 - u_2\| \leq \|[x_1]\| + \|[x_2]\| + 2\varepsilon$$

b) $\|[x]\| = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in U$ mit $\|x - x_n\| < \frac{1}{n}$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{U} \underset{\uparrow}{\Leftrightarrow} x \in U$$

genau dann wenn U abgeschl.

Folge in X/U

c) Zeige: $([x]_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|[x_k]\| < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} [x_k]$ konvergiert

(ist hinreichend nach Lemma I.2.10)

o.B.d.A: $\|x_k\| \leq \|[x_k]\| + 2^{-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty \text{ und } \sum_{k=1}^{n} x_k \ \overbrace{\text{konvergiert}}^{\text{gegen ein } x \in X} \text{ da } X \text{ vollst.}$$

$$\Rightarrow \left\| [x] - \sum_{k=1}^{n} [x_k] \right\| = \left\| \left[x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right] \right\| \underset{\uparrow}{\leq} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \to 0$$

da $\|[z]\| \leq \|z\| \ \forall z \in X$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} [x_k] \to [x]$$

☒

Bsp. I.4.14: Sei $D \subseteq [0,1]$ abgeschlossen,

$$X := C([0,1], \mathbb{K})$$

$$U := \{x \in X : x|_D \equiv 0\}$$

$$\Rightarrow \varphi : X/U \to C(D, \mathbb{K}) \qquad \varphi([x])(d) = x(d)$$

- ist wohldefiniert: $\varphi([x+u])(d) = x(d) + \underbrace{u(d)}_{=0} = x(d)$
- linear und injektiv: klar

Außerdem kann man zeigen dass φ ein <u>isometrischer</u> Isomorphismus ist (also isometrisch & surjektiv).

Lemma I.4.15: X,Y: normiert

a) $1 \leq p \leq \infty \Rightarrow$

$$\|(x,y)\|_p := \begin{cases} \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p < \infty \\ \max\left(\|x\|, \|y\|\right) \end{cases}$$

definiert eine Norm auf $X \oplus Y$.

b) Alle diese Normen sind äquivalent und es gilt

$$(x_n, y_n) \to (x,y) \Leftrightarrow x_n \to x \text{ und } y_n \to y$$

c) X,Y vollständig $\Rightarrow$ $X \oplus Y$ vollständig.

Def. I.4.16: X,Y: normiert. Dann heißt ein lineare Abbildung $T: X \to Y$ Quotientenabbildung, wenn

$$T\left(\{x \in X : \|x\| < 1\}\right) = \{y \in Y : \|y\| < 1\}$$

Lemma I.4.17: Quotientenabb. haben Operatornorm 1. und sind surjektiv

Bew.: Klar.

Satz I.4.18: a) X: normiert $U \subseteq X$ abgeschl $\Rightarrow$ $X \to X/U$ ist Quotientenabbildung.

b) Ist $X \to Y$ Quotientenabbildung so ex. $V \subseteq X$ abgeschl. so dass X/V isometrisch isomorph zu Y ist.

Bew.: a) Sei $[x] \in X/U$ mit $\|[x]\| < 1$ $\quad q: X \to X/U$

$$\Rightarrow \exists\, u \in U \text{ mit } \|x-u\| < 1 \text{ und } \|[x-u]\| = \|[x]\|$$

$$\Rightarrow B_{X/U} \setminus \partial B_{X/U} \subseteq q(B_X \setminus \partial B_X)$$

Ist umgekehrt $\|x\| < 1$, so folgt $\|[x]\| \leq \|x\| < 1$

$$\Rightarrow q(B_X \setminus \partial B_X) \subseteq B_{X/U} \setminus \partial B_{X/U}$$

b) Ist $p: X \to Y$ Quotientenabb., so setze $V := \ker(p)$ (ist abgeschl. UVR) und

$$\varphi: X/V \to Y \qquad [x] \mapsto p(x)$$

∘) φ ist wohldef: $\varphi(x+v) = \varphi(x) + \varphi(v) = \varphi(x)$

∘) φ ist linear & injektiv

∘) φ ist surjektiv da p surjektiv ist

∘) φ ist isometrisch:

z.Z.: $\|[x]\| = 1 \Rightarrow \|\varphi([x])\| = 1$

$\|[x]\| = 1 \Leftrightarrow$ b) $1 \leq \|x-v\| \ \forall\, v \in V$

a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, v \in V$ mit $\|x-v\| \leq 1+\varepsilon$

$$\Rightarrow \|p(x-v)\| \leq 1+\varepsilon \ (\text{da } \|p\| = 1)$$

$$\Rightarrow \|\varphi([x])\| \leq 1$$

b) $1 \leq \|x-v\| \;\; \forall v \in V$:

Falls $\|\varphi([x])\| < 1 \Rightarrow \|p(x)\| < 1$

$\Rightarrow p(x) = p(y)$ mit $\|y\| < 1$ (da $p(B_X) = B_Y$)

mit $v = x-y \in V$ und $1 \leq \|x-v\| = \|y\| < 1$ $\lightning$ ▨

Def. I.4.19: $T: X \to Y$ heißt Isomorphismus falls T linear, bijektiv, stetig und T^{-1} stetig ist. T heißt isometrischer Isomorphismus falls zusätzlich T eine Isometrie ist ($\Leftrightarrow \|Tx\| = \|x\| \;\; \forall x \in X$

$\Leftrightarrow \|Tx\| = 1 \;\; \forall x \in X$ mit $\|x\| = 1$).