Übung zur Funktionalanalysis, SS 2011

12. Hausübungsblatt

Aufgabe 53 (4 P)

Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ definieren wir $\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j$ und den Linkshiftsoperator $(Sx)_n = x_{n+1}$. Konstruieren Sie ein stetiges lineares Funktional $L \in (\ell^\infty)'$ mit Folgenden Eigenschaften:

(1) $\liminf x_n \le \liminf \sigma_n(x) \le L(x) \le \limsup \sigma_n(x) \le \limsup x_n$.
(2) $L(x) = \lim x_n$ wenn x konvergent ist und $L(x) = \lim \sigma_n(x)$ wenn $(\sigma_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

Zeigen Sie, dass hieraus folgt:

(1) $L(x) \ge 0$ wenn $x_n \ge 0$ für alle n.
(2) $L(Sx) = L(x)$ für alle $x \in \ell^\infty$.

Hinweis: Aufgabe 56. Sie können außerdem zeigen, dass für p sublinear und f linear gilt:

$$\forall x, f(x) \le p(x) \Longrightarrow \forall x, -p(-x) \le f(x).$$

Aufgabe 54 (6 P)

(1) Es sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass für alle $t > 0$ die Bedingung $\lim_{n\to\infty} f(nt) = 0$ gilt. Zeigen Sie: $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

(2) Seien X und Y Banachräume und $B\colon X \times Y \to \mathbb{K}$ bilinear. B sei partiell stetig, d.h., für alle $x \in X$ ist $y \mapsto B(x,y)$ stetig, und für alle $y \in Y$ ist $x \mapsto B(x,y)$ stetig. Zeigen Sie, dass dann B stetig ist.

Hinweis: Bairescher Kategoriensatz und seine Folgerungen.

Aufgabe 55 (6 P)

Eine Folge (b_n) in einem Banachraum X heisst *Schauderbasis*, falls jedes $x \in X$ eindeutig als konvergente Reihe $x = \sum_{n=1}^\infty \xi_n b_n, \xi_n \in \mathbb{K}$, dargestellt werden kann.

(1) Zeigen Sie, dass die Einheitsvektoren (e_n) ein Schauderbasis in $\ell^p, 1 \le p < \infty$ bilden, aber nicht in ℓ^∞.

(2) Wenn X ein Schauderbasis besitzt, ist X separabel.

(3) Die Abbildungen $b_n^*\colon x \mapsto \xi_n$ sind wohldefiniert und linear.

(4) Zeigen Sie, dass $|||x||| = \sup_N \| \sum_{n=1}^N b_n^*(x) b_n \|$ eine Norm auf X definiert, die äquivalent mit der vorherigen Norm ist (Hinweis: offene Abbildung) und so dass, $b_n^* \in (X, |||\cdot|||)'$ (Hinweis: Induktion).

Zusammen folgt ein Satz von Banach: $b_n^* \in X'$ für (b_n) ein Schauderbasis.

Bonus Aufgaben (zählen nicht zu den 50% für die Prüfungszulassung)

Aufgabe 56 (4 P)

Wir übernehmen die Notation aus Aufgabe 53.

(1) Zeigen Sie, dass $\Sigma x := (\sigma_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ und berechnen Sie $\| \Sigma \|$.

(2) Zeigen Sie: wenn x konvergent ist, dann ist Σx konvergent mit gleichem Grenzwert.

(3) Zeigen Sie, dass $p_1(x) = \limsup x_n$ und $p_2(x) = \limsup \sigma_n(x)$ sublineare Funktionale auf ℓ^∞ definieren.

Aufgabe 57 (4 P)

Seien X ein Banachraum und $T \in L(X)$ mit $\|T\| \in \sigma(T)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\|\mathrm{Id} + T\| = 1 + \|T\|.$$

Hinweis: Widerspruchbeweis.