Übung zur Funktionalanalysis, SS 2011

1. Hausübungsblatt

Definition
Für $p > 0$ setzen wir

$$\ell^p = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty\} \quad \text{und} \quad \|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

In der Vorlesung werden wir sehen, dass $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ für $p \geq 1$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 1 (3 P)

(1) Zeichnen Sie $B_p = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} = 1\}$ für $p = \frac{1}{2}, p = 1, p = 2$ und $B_\infty = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x_1|, |x_2|) = 1\}$.

(2) Warum ist $d(x, y) = (|x_1 - y_1|^{\frac{1}{2}} + |x_2 - y_2|^{\frac{1}{2}})^2$ keine Metrik auf $\mathbb{R}^2$?

(3) Warum ist ℓ^p kein normierter Raum für $0 < p < 1$?

Aufgabe 2 (3 P)
Geben Sie eine beschränkte Folge in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ und $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ an, die keine konvergente Teilfolge hat.

Aufgabe 3 (5 P)
Zeigen Sie, dass die Abbildung d eine invariante Metrik auf $\mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert:

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Hinweis: Sie können zuerst zeigen, dass die Abbildung $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ konkav auf $\mathbb{R}^+$ ist, und dann, dass eine konkave Abbildung f von $\mathbb{R}^+$ nach $\mathbb{R}^+$ subadditiv ist, d.h., $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Definition
Der Vektorraum $\mathcal{L}^\infty(I)$ ist der Raum der messbaren Funktionen von einem Intervall I nach $\mathbb{R}$, die außerhalb einer Nullmenge beschränkt sind. Die Halbnorm auf $\mathcal{L}^\infty(I)$ ist definiert als das *wesentliche Supremum*

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf_{\substack{N \subset I \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in I \setminus N} |f(x)|.$$

Dann ist $L^\infty(I)$ definiert als $\mathcal{L}^\infty(I)/\mathcal{N}^\infty(I)$, wobei $\mathcal{N}^\infty(I) = \{f \in \mathcal{L}^\infty(I) \mid \|f\|_{L^\infty} = 0\}$ und $\|\cdot\|_{L^\infty}$ ist eine Norm darauf (warum?).

Aufgabe 4 (5 P)
Zeigen Sie:

(1) Für $a < b \in \mathbb{R}$ und $1 \leq p < \infty$ gilt $L^\infty[a, b] \subset L^p[a, b]$, genauer

$$\|f\|_{L^p} \leq (b - a)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty} \quad \forall f \in L^\infty[a, b].$$

(2) Für $1 \leq p < \infty$ gilt weder $L^p(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ noch $L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$.

(3) Für $f \in C[0, 1]$ gilt $\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty}$.