Übung zu Algebraische und Geometrische Strukturen in der Mathematik, SoSe 2014

14. Übungsblatt

Dieses Abschlussblatt ist für Sie zur Klausurvorbereitung gedacht. Sie können auf diesem Blatt keine Punkte für die Hausübungen sammeln, dafür sind die Lösungen sofort verfügbar. Die Rückschau zum Themenkomplex „Reguläre Flächen“ wurde bereits auf dem letzten Übungsblatt gegeben.

Körpererweiterungen, Polynomringe und Galoistheorie

1. Begründen Sie: Die Menge der konstruierbaren Zahlen liegt dicht in $\mathbb{C}$.
2. Seien k, l Körper und $f : k \to l$ ein Homomorphismus zwischen diesen. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.
3. Es seien $k \subseteq E$ und $k \subseteq F$ Körpererweiterungen von k mit $[E : k] = [F : k]$ endlich. Zeigen Sie, dass E und F isomorph als k-Vektorräume sind. Zeigen Sie, dass es einen Körperisomorphismus $\varphi\colon E \to F$ mit $\varphi(\lambda) = \lambda$ für alle $\lambda \in k$ gibt.
4. Zerlegen Sie $p_1, p_2 \in \mathbb{Q}[X]$ und $p_3 \in \mathbb{Z}_3[X]$ in irreduzible Faktoren, wobei $p_1 = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$, $p_2 = X^7 + 7X + 329$ und $p_3 = X^4 + X + 1$.
5. Sei $p \in \mathbb{R}[X]$ und $\deg(p) = 3$. Begründen Sie, warum $\mathbb{R}[X]/p \cdot \mathbb{R}[X]$ kein Körper ist. Gilt die gleich Aussage auch über $\mathbb{Q}[X]$?
6. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ isomorph ist zu $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 3) \cdot \mathbb{Q}[X]$.
7. Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(p)$ für $p(X) = X^3 - 2$ isomorph zu S_3 ist.

Gruppen

Es sei G diejenige Untergruppe von S_4, die von den folgenden Permutationen erzeugt wird:

$$\alpha := (1\ 2\ 3\ 4), \quad \beta := (2\ 4).$$

1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ord}(\alpha) = 4$ und $\mathrm{ord}(\beta) = 2$ gilt und ferner, dass die Beziehung $\alpha\beta = \beta\alpha^{-1}$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass
$$X := \{\beta^m \alpha^n \mid 0 \leq n \leq 3 \,\text{und}\, 0 \leq m \leq 1\}$$
eine Untergruppe von S_4 ist.
3. Zeigen Sie, dass $G = X$ gilt gilt und dass $|G| = 8$ ist.
4. Ist G abelsch? Begründen Sie!
5. Ist G eine normale Untergruppe von S_4? Begründen Sie!
6. Bestimmen Sie das Zentrum $Z(G)$ von G.
7. Zeigen Sie, dass für die Kommutatoruntergruppe G' von G gilt, dass $G' = Z(G)$.
8. Ist G auflösbar? Begründen Sie!