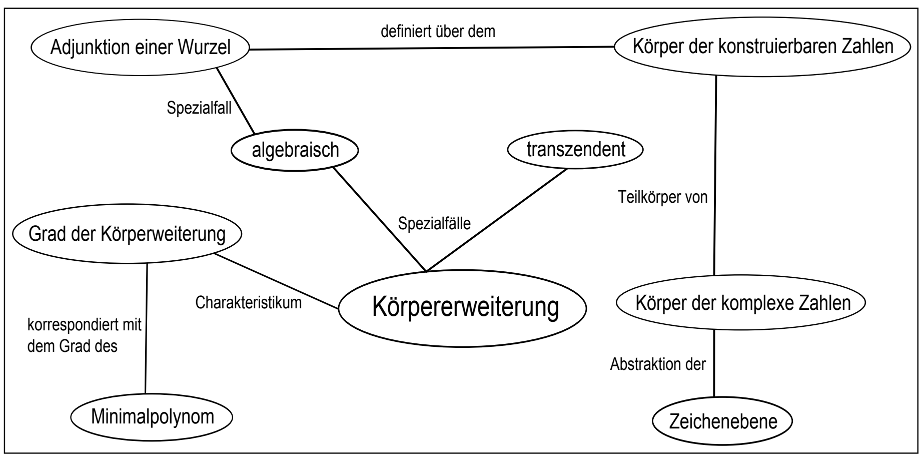
Übung zu Algebraische und Geometrische Strukturen in der Mathematik, SS 2012

10. Übungsblatt

Präsenzübungen

Aufgabe P29

Erstellen Sie in Ihrer Übungsgruppe eine *concept map* zu den Vorlesungsinhalten, indem Sie das folgende Beispiel um die Themengebiete Polynome bzw. Polynomringe und Gruppentheorie erweitern.



Im Gegensatz zu einer *mind map* werden die Verbindungslinien zwischen den Begriffen hier beschriftet, so dass eine Aussage über die Beziehung zwischen denselben möglich ist. Entlang der Linien liest man von links nach rechts bzw. von oben nach unten ("Der Grad der Körpererweiterung korrespondiert mit dem Grad des Minimalpolynoms."). Weitere Informationen finden Sie unter `http://de.wikipedia.org/wiki/Concept-Map`

Hinweis: Diese Aufgabe soll Ihnen helfen, die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Vorlesungsteilen besser zu verstehen und wesentliche Begriffe zu wiederholen. Nutzen Sie daher gerne auch Ihre Vorlesungsmitschrift.

Bitte wenden!

Hausübungen

Aufgabe H25 (4P)

Es sei $p \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom vom Grad 2. Zeigen Sie, dass p genau dann einen Nullstelle in $\mathbb{Q}$ hat, wenn beide Nullstellen in $\mathbb{Q}$ liegen. Zeigen Sie außerdem, dass

$$\mathbb{Q}(\mathrm{NS}(p)) = \mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(w)$$

gilt, wobei u und w die beiden Nullstellen von p sind.
Hinweis: Diese Aufgabe soll besonders das formal korrekte Aufschreiben üben. Dementsprechend können Sie nur die vollen Punkte für diese Aufgabe erhalten, wenn Ihre Lösung auch formal korrekt ist.

Aufgabe H26 (4P)

Sei $p \in \mathbb{Q}[X]$ mit $p(X) = X^4 - 5X^2 + 6$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\mathrm{NS}(p)) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, obwohl $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *keine* Nullstelle von p ist.
2. Zeigen Sie, dass es eine Aufzählung $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ von $\mathrm{NS}(p)$ gibt, sodass $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(p) = \{\mathrm{id}, (x_1\ x_2), (x_3\ x_4), (x_1\ x_2)(x_3\ x_4)\}$ gilt.

Aufgabe H27 (4P)

Sei $p \in \mathbb{Q}[X]$ mit $p(X) = X^6 - 2$.

1. Skizzieren Sie die Nullstellen von p in $\mathbb{C}$.
2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\mathrm{NS}(p)) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}, \sqrt{3} \cdot i) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}, e^{\frac{i\pi}{3}})$ und somit $[\mathbb{Q}(\mathrm{NS}(p)) : \mathbb{Q}] = 12$.
3. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(p)$ von einem Element τ der Ordnung 6 und einem Element σ der Ordnung 2 erzeugt wird, zwischen denen die Relation

   $$\sigma \cdot \tau^i = \tau^{-i} \cdot \sigma$$

   für $i \in \{0, \ldots, 5\}$ gilt.

   Hinweis: Für die Wahl von σ und τ schauen Sie sich die Beispiele aus der Vorlesung nochmal an. Ferner können Sie ohne Beweis benutzen, dass es für je zwei $a, b \in \mathbb{C}$, die algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind und für die $b \notin \mathbb{Q}(a)$ gilt, natürliche Zahlen n, m gibt, sodass $\{a^i b^j \mid 0 \leq i < n, 0 \leq j < m\}$ eine Basis von $\mathbb{Q}(a, b)$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist.
4. Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(p)$ auflösbar ist.

Hinweis: Wie immer können Sie frühere Aufgabenteile für spätere Aufgabenteile benutzen, auch wenn sie erstere nicht gelöst haben.