Übung zu Algebraische und Geometrische Strukturen in der Mathematik, SoSe 2014

7. Übungsblatt

Aufgabe P20
Seien G_1, G_2 Gruppen. Für $i = 1, 2$ sei $g_i \in G_i$ mit endlicher Ordnung n_i. Was ist die Ordnung von $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ in Abhängigkeit von $\operatorname{ord}(g_1)$ und $\operatorname{org}(g_2)$?

Aufgabe P21
Finden Sie eine Gruppe G und eine Untergruppe $H \leq G$, so dass

$$(xH, yH) \mapsto xyH$$

keine wohldefinierte Abbildung auf dem Raum der Linksnebenklassen G/H definiert.

Aufgabe P22
Sei G eine endliche Gruppe und seien $A, B \leq G$ Untergruppen. Zeigen Sie

1. Ist für $x, y \in G$ der Schnitt $xA \cap yB$ nicht leer, so ist er Nebenklasse von $A \cap B$.
2. Es gilt $[G : A \cap B] \leq [G : A] \cdot [G : B]$

Hausübungen

Aufgabe H17 (4P)
Es sei M mit $M \times M \to M$, $(m, n) \mapsto m \circ n$ ein Monoid und $\varphi\colon M \times M \to M \times M$ sei gegeben durch $(m, n) \mapsto (m \circ n, n)$. Zeigen Sie dass

$$\varphi \text{ ist bijektiv} \Leftrightarrow \varphi \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow (M, \circ) \text{ ist eine Gruppe}$$

gilt.

Beachten Sie: Diese Aufgabe soll besonders das formal korrekte Aufschreiben üben. Dementsprechend können Sie nur die vollen Punkte für diese Aufgabe erhalten, wenn Ihre Lösung auch formal korrekt ist.

Aufgabe H18 (3P)
Sei k ein Körper.

1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_n(k)$ eine normale Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(k)$ ist.
2. Zeigen Sie, dass die Faktorgruppe $\mathrm{GL}_n(k)/\mathrm{SL}_n(k)$ isomorph zur multiplikativen Gruppen $(k \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.

Bitte wenden!

Aufgabe H19 (5P)

1. Es sei $G = \{a, b, c, d\}$ eine Menge mit 4 Elementen. Vervollstängigen Sie die Tafel

$\circ$	a	b	c	d
a	a			
b		a		
c			a	
d				a

   so, dass $(G, \circ)$ eine Gruppe wird (dabei lesen wir die Tafel so, dass der Eintrag in der g-Zeile und h-Spalte der Wert $g \circ h$ ist).

   Hinweis: Warum muss in jeder Spalte und in jeder Zeile jedes Element von G genau einmal vorkommen?

2. Zu welcher der Gruppen $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ die die Gruppe aus Teil 1. isomorph?

3. Klassifizieren Sie alle Gruppen der Ordnung kleiner gleich vier, geben Sie also zu jeder solchen Gruppe eine Multiplikationstafel wie oben an (bei der Sie o.b.d.A. a als neutrales Element annehmen können).