Übung zu Algebraische und Geometrische Strukturen in der Mathematik, SoSe 2014

1. Übungsblatt

Präsenzübungen

Aufgabe P1

Wir betrachten auf $\mathbb{Q}^2 = \{a+\varepsilon b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ (also dem von den beiden linear unabhängigen Elementen 1 und ε aufgespannten Vektorraum) die folgenden Operationen:

$$(a+\varepsilon b) + (a' + \varepsilon b') := (a + a') + \varepsilon(b + b') \tag{1}$$

$$(a+\varepsilon b) \cdot (a' + \varepsilon b') := (aa' + 2bb') + \varepsilon(ab' + a'b) \tag{2}$$

1. Zeigen Sie, dass die Operationen (1) und (2) $\mathbb{Q}^2$ zu einem Körper machen, in dem $0 + \varepsilon 0$ das neutrale Element der Addition ist und $1 + \varepsilon 0$ das neutale Element der Multiplikation.
2. Wir betrachten nun die Teilmenge

   $$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

   von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist. Bestimmen Sie explizit das multiplikative Inverse von $1 + \sqrt{2}$.
3. Zeigen Sie, dass der Körper aus 1. isomorph ist zu $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Aufgabe P2

Zeigen Sie, dass die Restklassenringe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ Körper sind, nicht aber $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und auch nicht $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (bei letzterem bezüglich der komponentenweise Addition und Multiplikation). Kann es denn überhaupt einen Körper mit 4 Elementen geben?

Aufgabe P3

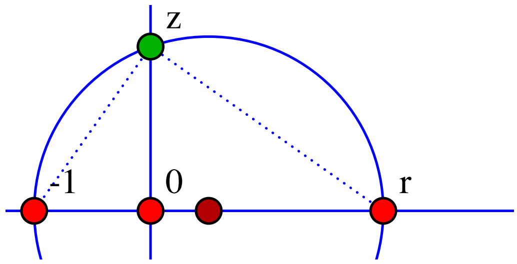
Welche der Folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind auch Teilkörper (Sie dürfen $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ohne Beweis verwenden)?

1. $\{0\}$ und $\mathbb{C}\backslash\{0\}$
2. $\mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \cdot \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \cap \sqrt{2} \cdot \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} + \sqrt{2} \cdot \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q} \cup \sqrt{2} \cdot \mathbb{Q}$
3. $\mathbb{R}$, $\sqrt{2} \cdot \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \cap \sqrt{2} \cdot \mathbb{R}$, $\mathbb{R} + \sqrt{2} \cdot \mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \cup \sqrt{2} \cdot \mathbb{R}$

Bitte wenden!

Aufgabe P4

Überlegen Sie sich anhand des folgenden Bildes und entsprechender Sätze aus der Elementargeometrie, dass zu einer positiven Zahl $r \in \mathbb{R}^+$ die positive Quadratwurzel $\sqrt{r} \in \mathbb{R}^+$ mit Zirkel und Lineal kontruierbar ist.



Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal *eine* Quadratwurzel aus der komplexen Zahl $1 + i$.

Hausübungen

Aufgabe H1 (4P)

Wir betrachten auf $\mathbb{Q}^2 = \{a+ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ (also dem von den beiden linear unabhängigen Elementen 1 und i aufgespannten Vektorraum) die folgenden Operationen:

$$(a + ib) + (a' + ib') := (a + a') + i(b + b') \tag{3}$$

$$(a + ib) \cdot (a' + ib') := (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \tag{4}$$

(dieses ist offenbar die Konstruktion von $\mathbb{C}$ aus $\mathbb{R}$, nur eingeschränkt auf Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$). Zeigen Sie, dass die Operationen (3) und (4) $\mathbb{Q}^2$ zu einem Körper machen, in dem $0+i0$ das neutrale Element der Addition ist und $1+i0$ das neutale Element der Multiplikation. Zeigen Sie außerdem, dass dieser Körper *nicht* isomorph zu dem aus Aufgabe P1 Teil 1. sein kann.

Aufgabe H2 (4P)

Konstruieren Sie die folgenden Zahlen mit Zirkel und Lineal aus $\{0, 1\}$:

$$(1 + i)^2, \quad \frac{1}{1 + i}, \quad z, \quad \sqrt[4]{3},$$

wobei z eine Quadratwurzel aus $1+2i$ ist. Geben Sie dabei jeweils die einzelnen Konstruktionsschritte an.

Aufgabe H3 (4P)

Zeigen Sie, dass man mit Zirkel und Lineal Winkel stets addieren kann, man also aus $e^{2\varphi\pi i}$ und $e^{2\varphi'\pi i}$ die Zahl $e^{2(\varphi+\varphi')\pi i}$ konstruieren kann.