Übung zur Analysis 2, SS 2010

7. Übungsblatt

Aufgabe 94 (5 P)
Im Folgenden sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und Riemann-integrierbar auf $[-\pi, \pi]$. Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Ja/Nein und begründen Sie Ihre Antwort.

1. Ein trigonometrisches Polynom ist auch ein (gewöhnliches) Polynom.
2. Ein trigonometrisches Polynom kann man auf ganz $\mathbb{R}$ in eine Potenzreihe um 0 entwickeln.
3. Die Monome $(x^n : [-1, 1] \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ bilden ein Orthonormalsystem.
4. Es gibt ein f wie oben, dessen Fourierreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ ist.
5. Konvergiert die Fourierreihe von f auf ganz $\mathbb{R}$ gegen f, so kann man f auf $]-\pi, \pi[$ in eine Potenzreihe um 0 entwickeln.

Aufgabe 95 (6 P)
Es seien

$$p_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad p_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \quad \text{und} \quad p_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}\, \frac{3x^2 - 1}{2}$$

die ersten drei (normierten) Legendre Polynome.

1. Zeigen Sie
$$\int_{-1}^{1} p_n(t) p_m(t)\, dt = \begin{cases} 0 \text{ falls } m \neq n \\ 1 \text{ falls } m = n \end{cases}$$
falls $m, n \leq 2$.
2. Bestimmen Sie die Koeffizienten des Polynoms
$$p(x) = d_0 + d_1 x^1 + d_2 x^2$$
so, dass
$$\int_{-1}^{1} |\sin(\pi x) - p(x)|^2\, dx$$
minimal wird. Hierbei dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass sich p_0, p_1, p_2 zu einem orthonormalen System $(p_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ fortsetzen läßt.

Aufgabe 96 (7 P)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch, und sei $f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi, \pi]$.

1. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten c_n von f (wie in R:8.9 definiert).
2. Zeigen Sie, dass die Fourierreihe auf ganz $\mathbb{R}$ gegen $f(x)$ konvergiert.
3. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

   Hinweis: Verwenden Sie Teil 2 bei $x = 0$.

Aufgabe 97 (6 P)
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

1. Beweisen Sie, dass $f = 0$ genau dann, wenn $\int_a^b f(x)^2 dx = 0$.
2. Zeigen Sie, dass $f = 0$ genau dann, wenn $\int_a^b f(x) x^n dx = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

   Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Stone-Weierstraß, um f durch ein Polynom anzunähren, und benutzen Sie Teil 1.