Übung zur Analysis 2, SS 2010

9. Übungsblatt – Lösungsskizzen

Aufgabe 102

1. Ja, da 0 auf 0 abgebildet wird.
2. Nein, z.B. ist die Abbildung $A(x) = 2x$ linear aber nicht kontrahierend.
3. Ja, denn nach Satz R:9.21 ist dann f differenzierbar auf U und somit insbesondere stetig.

Aufgabe 103

Da U beschränkt ist, gibt es ein R, so dass für alle $a \in U$ gilt $|a| \leq R$ (für $U \subset \mathbb{R}^n$ ist das äquivalent zu Def. R:2.18). Nach dem Schrankensatz (Satz R:9.19) gilt weiter $|f(a)-f(b)| \leq M|a-b| \leq M(R+R)$. Für ein fixes $x_0 \in U$ und alle $a \in U$ ist also $|f(a)| = |f(a)-f(x_0)+f(x_0)| \leq |f(a)-f(x_0)|+|f(x_0)| \leq 2MR+|f(x_0)|$. Also ist f beschränkt (vergleiche Def. R:4.13).

Aufgabe 104

Es gilt

$$\begin{aligned}[df(r,\alpha,\beta)] &= \begin{pmatrix} D_1f_1 & D_2f_1 & D_3f_1 \\ D_1f_2 & D_2f_2 & D_3f_2 \\ D_1f_3 & D_2f_3 & D_3f_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -r\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) & r\cos(\alpha)\cos(\beta) & -r\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & r\cos(\alpha)\sin(\beta) & r\sin(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Alle partiellen Ableitungen sind stetig, und somit (Satz R:9.21) ist f auf ganz $\mathbb{R}^3$ differenzierbar, mit df wie angegeben.

Aufgabe 105

1. [2P] Nach Satz R:9.21 genügt es, zu zeigen, dass alle partiellen Ableitungen von f auf U existieren und stetig sind. Es gilt

   $$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2}} = -\frac{1}{2}\left((x_1)^2+(x_2)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x_1 = \frac{-x_1}{|x|^3}$$

   und

   $$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \frac{-x_2}{|x|^3} .$$

   Also existierten die partiellen Ableitungen. Da $1/|x|$ stetig ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, sind diese auch stetig.

2. [3P] Es gilt

$$g(t) = f(\gamma(t)) = \left((t^2+1)^2 + t^6\right)^{-\frac{1}{2}}$$

also

$$g'(t) = -\frac{1}{2}\left((t^2+1)^2 + t^6\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2(t^2+1)2t + 6t^5) \ .$$

Über die Kettenregel erhält man nach Bemerkung R:9.18

$$\begin{aligned} g'(t) = df(\gamma(t))\gamma'(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-(t^2+1)}{|\gamma(t)|^3} & \frac{-t^3}{|\gamma(t)|^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \\ &= \left((t^2+1)^2 + t^6\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(t^2+1)t - 3t^5) \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 106

Sei $\{u_1, \ldots, u_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Nach Voraussetzung gilt $f_k(x+h) - f_k(x) = A_k h + r_k(h)$ für $k = 1, \ldots, n$ mit $A_k \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ und $\lim_{h\to 0} |r_k(h)|/|h| = 0$. Dann gilt für $h + x \in U$,

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{k=1}^{n} (f_k(x+h) - f_k(x))u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k(h)u_k + \sum_{k=1}^{n} r_k(h)u_k = Ah + r(h) \ , \end{aligned}$$

wobei $Ah := \sum_{k=1}^{n} A_k(h)u_k$, so dass $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, und $r(h) := \sum_{k=1}^{n} r_k(h)u_k$. Mit der Dreiecksungleichung gilt

$$|r(h)|/|h| \leq \sum_{k=1}^{n} |r_k(h)|/|h| \ ,$$

und die rechte Seite geht gegen 0 für $h \to 0$. Also auch $\lim_{h\to 0} |r(h)|/|h| = 0$. Nach Definition (siehe Bemerkung R:9.13a) ist $df(x) = A$.

Zusatzaufgabe: Da Projektion $\mathrm{pr}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_k$ linear ist, sit sie insbesondere auch differenzierbar. Daher folgt die differenzierbarkeit von $f_k = \mathrm{pr}_k \circ f$ aus der Kettenregel.

Aufgabe 107

Wir schreiben $h = h_1e_1 + h_2e_2 + ... + h_ne_n$, wobei $e_1, ..., e_n$ die Standard-Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. Dann gilt

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{k=1}^{n} \Big(f(x + v_k) - f(x + v_{k-1}) \Big) \ ,$$

wobei wir $v_0 = 0$ und $v_k = \sum_{i=1}^{k} h_i e_i$ für $k = 1, ..., n$ setzen. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi_k \in]0, h_i[$, so dass

$$f(x+v_k)-f(x+v_{k-1}) = f(x+v_{k-1}+h_k e_k)-f(x+v_{k-1}) = D_k f(x+v_{k-1}+\xi_k e_k)\cdot h_k \ .$$

Sei

$$M := \sup\{D_i f(x) \,|\, i = 1, ..., n,\ x \in U\} \ ,$$

dann gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x+v_k) - f(x+v_{k-1})| &\leq M \sum_{k=1}^{n} |v_k - v_{k-1}| \\ &= M \sum_{k=1}^{n} |h_k| \leq Mn \sup\{|h_1|, ..., |h_n|\}. \end{aligned}$$

Falls $\varepsilon > 0$ und $|h| \leq \frac{1}{Mn}\varepsilon$, so gilt $|h_k| \leq \frac{1}{Mn}\varepsilon$, also $\sup\{|h_1|, ..., |h_n|\} \leq \frac{1}{Mn}\varepsilon$ und somit

$$|f(y) - f(x)| \leq Mn\frac{1}{Mn}\varepsilon = \varepsilon$$

falls $|x - y| < \frac{1}{Mn}\varepsilon$. Also ist f stetig.