Übung zur Analysis 2, SS 2010

8. Übungsblatt – Lösungsskizzen

Aufgabe 98

1. Nein, z.B. hat $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Operatornorm 1 (siehe Aufgabe 99), ist aber nicht invertierbar.

2. Ja, aus $f(x+h) - f(x) = df(x)h + r(h)$ mit $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$ folgt
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(df(x)h + r(h)) = df(x)1,$$
wobei wir 1 als Element des Vektorraums $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ auffassen.

3. Nein, df ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

4. Ja, nach Beispiel R:9.14.

5. Ja, nach der Definition einer offenen Menge im $\mathbb{R}^n$ existiert für $x \in U$ ein $\delta > 0$ so dass $U_\delta(x_0) \subseteq U$, also gilt $x + h \in U$ falls $|h| < \delta$.

6. Nein, z.B. für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist $f(x+h) = x^2 + 2xh + h^2$ und $df(x)1 = f'(x) = 2x$. Also gilt
$$f(x+h) = x^2 + 2xh + h^2 \neq x^2 + 2xh = f(x) + Ah$$
für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| > 0$.

Aufgabe 99

1. [3 P] Es gilt $|B(x,y)|^2 = (ax)^2 + (by)^2$. Sei $|a| \geq |b|$. Dann $|B(x,y)|^2 = (ax)^2 + (by)^2 \leq a^2(x^2+y^2)$. Also folgt aus $|(x,y)| \leq 1$, dass $|B(x,y)| \leq |a|$. Ferner gilt für $(x,y) = (1,0)$, dass $|B(x,y)| = |a|$. Also ist $|a|$ die kleinste obere Schranke der Menge
$$\{|B(x,y)| \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } |(x,y)| \leq 1\} \,.$$
Somit $\|B\| = |a|$. Für $|a| < |b|$ vertauscht man im obigen Argument die Rollen von a und b und erhält $\|B\| = |b|$.

2. [3 P] Man wähle $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Nach Teil 1. gilt $\|B\| = 2$. Andererseits gilt $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, so dass $\|B^{-1}\| = 1$.

Aufgabe 100

Sei $h = (a, b)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
r(a,b) &= f(x+a, y+b) - f(x,y) - \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= (\ (x+a)^2(y+b) - x^2y - 2xya - x^2b\ ,\ (y+b)^2 - y^2 - 2yb\ ) \\
&= (ya^2 + 2xab + a^2b, b^2)\ .
\end{aligned}$$

Es gilt $|a| \leq |h|$ und $|b| \leq |h|$, und somit

$$\begin{aligned}
|r(a,b)|^2 &= (ya^2 + 2xab + a^2b)^2 + b^4 \leq (|ya|^2 + |2xab| + |a^2b|)^2 + |b|^4 \\
&\leq |h|^4((|y|^2 + 2|x| + |h|)^2 + 1) \\
\Rightarrow \quad \frac{|r(a,b)|}{|h|} &\leq |h|\sqrt{(|y|^2 + 2|x| + |h|)^2 + 1}\ .
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite der Ungleichung für $h \to 0$ gegen 0 geht, gilt insbesondere $\lim_{h\to 0} |r(h)|/|h| = 0$.

Aufgabe 101

1. [3 P] Die partiellen Ableitungen sind gegeben durch die Grenzwerte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^3}$$

   und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^3},$$

   welche beide existieren und gleich 0 sind.

2. [2 P] Es gilt $f(t,t) = \frac{1}{2}$ für $t \neq 0$, aber $f(0,0) = 0$. Also gilt $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$ und f kann nicht stetig sein.

3. [3 P] Falls $(x,y) \neq 0$, so ist f auf einer Umgebung U von (x,y) durch $(x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ gegeben. Betrachten wir die Funktion $g_y : U \to \mathbb{R}$, $g_y(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, dann gilt nach Definition

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g_y'(x) = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \tag{1}$$

   nach der Quotientenregel. Mit dem gleichen Argument sieht man auch

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g_x'(y) = \frac{x(x^2+y^2) - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2},$$

   mit $g_x : U \to \mathbb{R}$, $g_x(y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.