Staatsexamen GS: Mündliche Prüfung

Beispiele

Bodo Werner

Vorbemerkung: Die folgenden Beispiele sollen exemplarisch den Ablauf einer mündlichen Prüfung aufzeigen. Die dabei verwendeten mathematischen Begriffe (*Vokabeln*) sind fett gedruckt. Sie können eine Prüfung sehr gut in Ihrer Arbeitsgruppe simulieren, indem Sie sich gegenseitig Kurzreferate zu den angesprochenen Themen halten.
Die Fragen sind durchaus in der Regel anspruchsvoll. In einer konkreten Situation einer mündlichen Prüfung können Sie mit Hilfen rechnen. Die hier vorliegende Frageliste, die noch erweitert werden wird, soll aber auch Ihr Verständnis verbessern. Sie können auch dann, wenn nicht direkt erfragt, ein erläuterndes Beispiel Ihrer Wahl anbieten.

Analysis

1. **Folgen allgemein**

   - Erklären Sie an Hand eines Beispiels den Unterschied zwischen **rekursiver** und **expliziter Darstellung einer Folge**. Antwort: Eine **geometrische Folge** (a_n) lässt sich explizit durch
     $$a_n := q^n$$
     und rekursiv durch
     $$a_n = qa_{n-1},\ a_0 = 1$$
     darstellen.
   - Was haben reellen Folgen mit Abbildungen zu tun? A.: Es handelt sich um eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, wobei einer natürlichen Zahl n das n.te Folgenglied zugeordnet wird.
   - Um was für eine Folge handelt es sich bei der berühmten **Fibonacci-Folge**? Antwort:
     $$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$$
   - Wie lautet das **Bildungsgesetz**? Antwort: Jedes Folgenglied ist die Summe ihrer Vorgänger.
   - Wie nennt man ein solches Bildungsgesetz und wie kann man dieses hier knapp formulieren? Antwort: **Rekursives Bildungsgesetz**,
     $$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, F_0 = 0, F_1 = 1.$$

- Welchen Typ von Bildungsgesetzen gibt es noch und gibt es einen solchen auch für F-Folgen? Antwort: **explizites Bildungsgesetz**. Dieses gibt es hier. Es ist die Formel von **Binet**. Ich kenne diese nicht auswendig, weiß aber, dass die große Goldenen Schnittzahl dort vorkommt.
- Hat die F-Folge einen **Grenzwert**? Antwort: Nein, sie wächst über alle Grenzen, ist unbeschränkt. Z.B. kann man $F_n \geq n$ ganz einfach mit vollständiger Induktion zeigen.
- Was wissen Sie über die Folge der Quotienten aufeinanderfolgender F-Zahlen? Antwort: Sie **konvergiert**, es gilt

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$$

  mit der großen **Goldenen Schnittzahl** Φ.
- Warum gilt dies? Was ist, wenn man $\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}}$ betrachtet?
- Geben Sie ein Beispiel für eine **Nullfolge**. Antwort: $a_n = \frac{1}{n}$.
- Wodurch ist eine Nullfolge definiert? Antwort: Sie hat den **Grenzwert** Null.
- Wann liegt eine Zahl b in der **ε-Nähe** einer anderen Zahl a? (ε sei positiv). Antwort: Wenn $|a - b| < \varepsilon$.
- Wie lautet die ε-Definition einer Nullfolge? Benutzen Sie den Begriff ε-Nähe. Antwort: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass alle a_n für $n > n_0$ in der ε-Nähe von Null liegen, d.h., dass gilt

  $$|a_n| < \varepsilon \text{ für alle } n > n_0.$$

  .
- Man bezeichnet meist eine Folge mit dem Symbol $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wie nennt man a_n? Antwort: n.tes **Folgenglied**.
- Muss eine Folge unendlich viele verschiedene Folgenglieder besitzen? Antwort: Nein. Beispiel: Konstantenfolge $a_n = 1$ für alle n.
- Was ist eine **beschränkte Folge**? Antwort: Es muss **obere und untere Schranken** geben, d.h., es muss Zahlen $c < C$ geben mit

  $$c \leq a_n \leq C \text{ für alle } n$$

- Geben Sie ein Beispiel für eine beschränkte, aber nicht konvergente Folge. Antwort: $a_n = (-1)^n$.
- Was ist eine **geometrische Folge**? Antwort: $a_n = q^n$ mit einer Basis q.

- Wie lautet deren **rekursives Bildungsgesetz**? Antwort: $a_{n+1} = qa_n$.
- Wann ist q^n eine Nullfolge? Antwort: Wenn $|q| < 1$.

2. **Geometrische Folgen**

- Was ist eine **geometrische Folge**? Antwort: $a_n := q^n$ mit einem $q \in \mathbb{R}$.
- Wo treten geometrische Folgen auf? Antwort: a) Verzinsung, $q := 1 + p$, wobei p der Zinssatz ist. b) Frequenzen der 12 Töne einer temperierten Tonleiter mit $q := 2^{1/12}$
- Kann man eine geometrische Folge auch **rekursiv definieren**? Antwort: Ja, $a_{n+1} = qa_n$.
- Gibt es noch andere Folgen, die dieser Rekursion genügen? Antwort: Ja, alle Vielfachen, also $a_n = cq^n$ mit $c \in \mathbb{R}$.
- Was wissen Sie über die Konvergenz einer geometrischen Folge? Antwort: Fals $|q| < 1$, handelt es sich um eine Nullfolge (der Grenzwert ist Null), für $q = 1$ handelt es sich um eine Konstantenfolge (Grenzwert 1), für $q = -1$ um eine beschränkte Folge mit zwei Häufungspunkten und sonst um eine unbeschränkte Folge, die für $q > 1$ gegen Unendlich divergiert.
- Berechnen Sie die **relative Wachtumsrate** von geometrischen Folgen. Antwort:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n} = q - 1.$$

- Die relative Wachtumsrate ist also konstant, d.h. unabhängig von n. Wie nennt man solch ein Wachstum? Antwort: Exponentiell. Für $q > 1$ monotones Wachsen, für $0 < q < 1$ exponentielles Fallen.
- Gibt es geometrische Folgen, die der Fibonacci-Rekursion $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ genügen? Antwort: Wenn man man $a_n = q^n$ ansetzt, so muss $q^{n+1} = q^n + q^{n-1}$ gelten. Dividiert man beide Seiten durch q^{n-1}, so erhält man $q^2 = q+1$ mit den beiden Lösungen $q = \Phi$ (Große Goldene Schnittzahl) und $q = -\phi$ (mit ϕ als kleine Goldene Schnittzahl).
- Für $q > 1$ **divergiert** die Folge $a_n := q^n$ gegen Unendlich, ebenfalls jede Potenz $b_n := n^k$ mit irgendeinem $k \in \mathbb{N}$. Welche Folge geht schneller gegen Unendlich und wie formuliert man dies? Antwort: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0,$$

d.h. die geometrische Folge überholt die Potenzfolge irgendwann.
- (Einserfrage). Können Sie diese letzte Aussage beweisen? Antwort: Setze

$$c_n := \frac{n^k}{q^n}$$

und zeige, dass es ein möglicherweise sehr großes N gibt, so dass (c_n) für $n \geq N$ streng monoton, exponentiell fällt. Denn es gilt

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^k}{q} \to \frac{1}{q} < 1.$$

3. **Potenzfunktionen**

- Was sind **Potenzfunktionen**? A.: Mit einem **Exponenten** $b > 0$ handelt es sich um Abbildungen $x \mapsto x^b$ oder auch — mit einem Koeffizienten a — um $x \mapsto a \cdot x^b$. Beispiel: $x \mapsto x^2$.
- Kann x eine beliebige reelle Zahl sein? A.: Nein, es muss i.A. $x \geq 0$ gelten, wie man etwa für $b = 0.5$ erkennen kann.
- Zeichnen Sie den Graphen einer Potenzfunktion für $b < 1, b = 1$ und $b > 1$ und machen Sie den qualitativen Unterschied im Hinblick auf **sublinear, linear** und **superlinear** klar. A.: Sie sollten die Graphen von $x \mapsto x^n$ auf $[-2, 2]$ für $n \in \mathbb{N}$ gron skizzieren können (mit Unterscheidung von geradem und ungeradem n) und dabei klar machen können, wie sich größer werdende n auswirken.
- Wodurch ist **Potenzwachstum** charakterisiert? A.: Die Wachstumsgröße $y = f(x)$ wächst bei Verdopplung (oder Verdreifachung oder Vervielfachung um einen Faktor) stets um den gleichen Faktor, unabhängig von der Ausgangsgröße.
- Welches ist die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^b$? A.: Wieder eine Potenzfunktion mit Exponenten $\frac{1}{b}$. Die Umkehrfunktion einer superlinear wachsenden Potenzfunktion ist sublinear wachsend (und vice versa). Ihre Graphen entstehen durch Spiegelung an der Diagonalen.

4. **Periodische Funktionen**

- Was versteht man unter **Kreisfunktionen**, auch **trigonometrische Funktionen** genannt? A.: Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens
- Woher stammt der Name **Kreisfunktion**? A.: Man kann den **Einheitskreis** für ihre Definition heranziehen (Zeichnung!).
- Welche **Periode** haben die Kreisfunktionen im Bogenmaß (mit Begründung)? A.: $T = 2\pi$. Wenn man einmal rum ist (der Umfang des Einheitskteises ist 2π), beginnt alles von vorn.
- Welche Periode hat $x \mapsto \sin(10 \cdot x)$? A.: $T = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$.
- Wie ist allgemein eine T-Periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert? A.: $f(x + T) = f(x)$ für alle x.
- Was versteht man unter **Frequenz** einer T-periodischen Funktion? A. $\nu := \frac{1}{T}$ – Anzahl der „Schwingungen“ pro Zeiteinheit oder Anzahl der Periodenintervalle, die in ein Intervalle mit der Länge Eins hineinpassen.

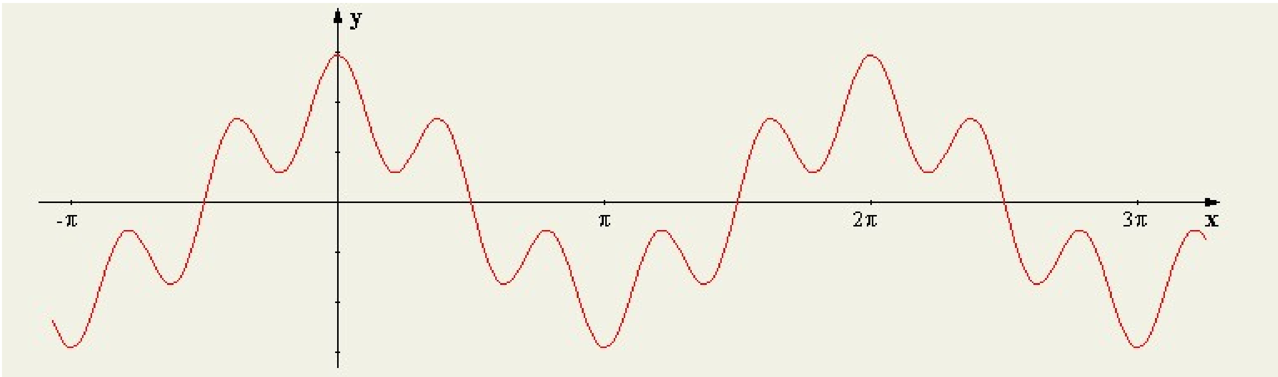

Abbildung 1: Periodische Funktion

- Was versteht man unter einer **q-periodischen Folge** a_n? A.: $a_{n+q} = a_n$ für alle n.
- Können Sie ein Beispiel aus der Vorlesung *Fibonaccizahlen, ...* angeben, wo periodische Folgen auftreten? A.: Betrachte einen Orbit einer Drehung um einen rationalen Winkel $\omega = \frac{p}{q}$, definiert durch $x_k = k \cdot \omega \bmod 1$.
- Schauen Sie sich Abb. 1 an.

  Sie sehen einen Graphen einer 2π-periodischen Funktion, die die Summe zweier Kosinusfunktionen mit unterschiedlichen Frequenzen sind. Können Sie schätzen, welche beteiligt sind? A.: Der normale Kosinus und der Kosinus mit 5-facher Frequenz bzw. mit einer Periode, die der fünfte Teil von 2π ist, z.B. $f(x) = 2\cos(x) + \cos(5x)$.

5. **Unendliche Reihen**

- Beispiel für eine unendliche Reihe? Antworten: Die harmonische Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ oder $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ oder .....
- Beschreiben Sie möglichst allgemein (oder auch unter Beziehung auf das Beispiel eben), unter Verwendung der Begriffe **Reihenglieder** und **Partialsummen**, was eine unendliche Reihe ist. Antwort: Ist eine Folge (a_n) – die **Reihenglieder**, z.B. $a_n = \frac{1}{n}$ – gegeben, so ist die zugehörige unendliche Reihe die Folge der **Partialsummen** $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ und wird mit dem Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Wenn diese gegen einen **Grenzwert** s konvergiert, so nennt man s den **Wert** der unendlichen Reihe und schreibt
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s.$$
- Was ist eine **geometrische Reihe**? Antwort: Ihre Reihenglieder sind durch eine **geometrische Folge** $a_n = q^n$ gegeben, d.h. es handelt sich um die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

- Wann konvergiert eine geometrische Reihe? Gegen welchen Wert? Antwort: Wegen der **geometrischen Summenformel** gilt
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$
Wenn $|q| < 1$ ist (q^k) eine **Nullfolge**. Aus dem **Hauptsatz über die Konvergenz von Folgen** folgt, dass
$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}.$$
Daher ist $\frac{1}{1-q}$ der Wert der geometrischen Reihe, wenn $|q| < 1$.
- Was haben **periodische Dezimalbrüche** mit unendlichen Reihen zu tun? Nehmen wir das Beispiel $x = 0.\overline{12}$. Antwort: Es ist
$$x = \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \frac{12}{1000000} + \cdots$$
Bei den Nennern handelt es sich um Potenzen 100^k, also mit $q := \frac{1}{100}$ gilt
$$x = 12(q + q^2 + q^3 + \cdots) = 12 \sum_{k=0}^{\infty} q^k - 12.$$
Bei $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ handelt es um eine gemetrische Reihe.
- Wir haben zwei Läufer, der eine ist um 10% schneller als der andere, welcher 100 Meter Vorsprung erhält. Denken Sie an **Achilles und die Schildkröte**. Wie kann man hier eine geometrische Reihe erkennen? Antwort: Am Anfang beträgt der Abstand 100. Wenn der schnellere Läufer 100 m zurückgelegt hat, beträgt der Vorsprung 90 Meter, er ist um den Faktor $q := 0.9$ geschrumpft. Jedes Mal, wenn der schnellere Läufer den Abstand zum Vordermann zurückgelegt hat, ist dieser um 90% geschrumpft. Addieren wir alle diese Abstände zusammen, erhalten wir
$$100 + 100q + 100q^2 + 100q^3 + \cdots = 100 \sum_{k=0}^{\infty} q^k = 100 \frac{1}{1-0.9} = 1000$$
Nach 1000 Metern wird der langsamere Läufer aufgeholt.
- Hätte man das auch ohne geometrische Reihe herausbekommen können? Antwort: Ja. Nennen wir x die gesuchte Länge. Wenn der schnellere Läufer x Meter zurücklegt, so hat der langsamere Läufer qx Meter gelaufen. Daher muss gelten
$$x = 100 + 0.9x,$$
woraus sich $x = 1000$ ergibt.

- Welche „Zinsaufgabe“ führt auf eine Partialsumme einer geometrischen Reihe? Antwort: Ratensparvertrag.
- Die **Exponentialreihe** oder auch die Sinusreihe (bzw. Kosinusreihe) sind Beispiele für **Funktionsreihen**. Konkretisieren Sie eine von diesen. A.:
  Sinusreihe:
  $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots ,$$
  Exponentialreihe:
  $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$
  Kosinusreihe:
  $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
- Wenn Sie mit Hilfe der Exponentialreihe die eulersche Zahl e berechnen sollen, wie geht das? A.:
  $$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$
- (Einserfrage) Können Sie die **Eulersche Formel** ableiten?
  A.: Diese Formel lautet
  $$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
  Weiter Ü 14 von Mathe III.

6. **Exponentielles Wachstum**

- Was versteht man unter **exponentiellem Wachstum**? Antwort: Die **relative Wachstumsrate** muss konstant sein, d.h. der relative Zuwachs in einer Zeiteinheit ist stets gleich, unabhängig von der Höhe der Wachstumsgröße. Beispiel: Bakterien vermehren sich inerhalb einer Stunde um 10%. Es gibt eine **Verdopplungszeit**, innerhalb der sich die Wachstumsgröße verdoppelt.
- Erläutern Sie dies für **diskrete Wachstumsprozesse**. Antwort: Die Wachstumsgröße zum diskreten Zeitpunkt n heiße a_n. Die relative Wachstumsrate zum Teitpunkt n ist die **absolute Wachstumsrate** $a_{n+1} - a_n$ bezogen auf a_n, also
  $$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}.$$
  Diese ist genau für **geometrische Folgen** $a_n = a_0(1+p)^n$ konstant gleich p.
- Geben Sie Beispiele für diskretes exponentielles Wachstum. Antwort: Zinseszinsen. p ist der Zinssatz und a_0 ist das Startguthaben. Oder $p = 1$ für einen Verdopplungsprozess.

- Was ist kontinuierliches exponentielles Wachstum? Antwort: Hier ist die Wachstumsgröße $f(t)$ eine von der *kontinuierlichen* Zeit t abhängende Zahl. In einer festen Zeitspanne $s > 0$ wächst $f(t)$ auf $f(t+s)$ stets um den gleichen Prozentsatz (Anteil, Faktor), unabhängig von t. Beispiel: $f(t) = a^t$. Dann ist $f(t+s) = a^{t+s} = a^t a^s = a^s f(t)$, d.h. der Faktor ist $a(s)$.
- Wann **fällt** eine Funktion **monoton**? Gibt es auch **exponentielles Fallen**? Antwort: $f(x) \leq f(y)$ für $x > y$. Beispiel: $f(t) = a^{-t}$ mit $a > 1$. Beim exponentiellen Fallen gibt es eine **Halbwertzeit**, innerhalb der sich die Wachstumsgröße halbiert.
- Gibt es neben den Exponentialfunktioenen noch andere streng monoton wachsende Funktionen? Antwort: Ja. **Potenzfunktionen** $f(t) = t^b$ mit $b > 0$, aber auch die **Umkehrfunktionen** von Exponentialfunktionen, die **Logarithmus-Funktionen**.
- Skizzieren Sie eine Exponentialfunktion und ihre Umkehrfunktionen. Hinweis bei der A.: Die Graphen von Umkehrfunktionen entstehen aus Spiegelungen an der Diagonale aus dem ursprünglichen Graphen.
- Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen $x \mapsto x^b$ mit $b > 0$? Antwort: Wieder Potenzfunktionen mit Exponenten $\frac{1}{b}$.
- Welche Funktionen sind nicht monoton? Antwort: Die **periodischen Funktionen** wie $x \mapsto \sin x$ (aber nicht nur die).

7. **Differentialrechnung**

- Was versteht man unter der **Ableitung** einer Funktion f an der Stelle a? Antwort: Limes eines **Differenzenquotienten**
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
Oder $f'(a)$ ist die **Steigung der Tangente** an den **Graphen** von f im **Punkt** $(a, f(a))$.
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen beiden Interpretationen? Antwortskizze: Der Differenzenquotient ist die Steigung einer **Sekante** durch die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Zeichnung!
- Sei $f(t)$ die Wegstrecke, die von einem Fahrzeug bis zur Zeit t zurückgelegt wird. Was genau ist $f'(a)$ und was ist der Differenzenquotient $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$? Antwort: **Momentangeschwindigkeit** zur Zeit a. **Durchschnittsgeschwindigkeit** im Zeitintervall zwischen t und a.
- Sei $f(t)$ eine Wachstumsgröße. Was versteht man unter der (momentanen) **absoluten Wachstumsrate** zur Zeit t? Antwort: $f'(t)$.
- Und unter der **relativen Wachstumsrate**? Antwort: $f'(t)/f(t)$, also absolute Wachstumsrate bezogen auf die Wachstumsgröße selbst.

- Wie kann man mit Hilfe der Ableitung **monotones Wachstum** einer Funktion f charakterisieren? A.: $f'(t) \geq 0$ für alle t.

8. **Integralrechnung**

- Was versteht man unter einem **bestimmten Integral**? Antwort: Gegeben ein **Intervall** $J := [a, b]$ und eine Funktion $f : J \to \mathbb{R}$. Als bestimmtes Integral bezeichnet man
$$\int_a^b f(x)dx,$$
was man als die (vorzeichenbehaftete) Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse zwischen a und b interpretieren kann (Zeichnung!).
- Was ist
$$\int_0^{2\pi} \sin x dx?$$
Antwort: Null (Zeichnung, Flächen heben sich auf)
- **Hauptsatz der Differential und Integralrechnung**? Antwort
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$
wobei F **Stammfunktion** von f ist, als $F' = f$ erfüllt.
- Kennen Sie Anwendungen der Integralrechnung auf die Stochastik? Antwort: Bei kontinuierlichen Zufallsvariablen X, deren Verteilungen eine W-Dichte $f(x)$ besitzt, kann man Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von bestimmten Integralen ausrechnen:
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Statistik

1. **Stichprobe**

- Wieso kann man mit einem **Vektor** aus dem $\mathbb{R}^n$ eine **Stichprobe** beschreiben? A.: Wenn man z.B. von n Personen deren Gewicht misst, erhält man einen Vektor der Länge n, dessen j-te **Komponente** das Gewicht der Person Nr. j ist. n heißt **Umfang der Stichprobe**, der Vektor **Stichprobenvektor**.
- In der beschreibenden Statistik spielt der Begriff **relative Häufigkeit** eine große Rolle. Erklären Sie diesen Begriff. A.: Die absolute Häufigkeit eines **Merkmals** ω ist die Anzahl der Komponenten x_j des Stichprobenvektors, für den $x_j = \omega$. Die relative Häufigkeit ist die absolute Häufigkeit dividiert durch n.

- Stellen Sie sich vor, Sie hätten von 1.000 SchülerInnen deren Gewicht bestimmt. Wie würden Sie diese Zahlenreihe grafisch darstellen. A.: Klassierung der Daten, Häufigkeitsverteilung, Histogramm. Siehe Skript.
- Erklären Sie an Hand von Beispielen die Attribute **quantitativ, qualitativ, diskret kontinuierlich** von **Merkmalen**.

  A.: Erhebt man die Nationalität oder Farben oder das Geschlecht, so sind die Merkmale qualitativ. Bestehen die Merkmale aus Zahlen, so spricht man von quantitativen Merkmalen. Kommen nur endlich viele Merkmale in Frage (z.B. Noten, Gewichtsklassen, Nationalität), so spricht man von diskrten Merkmalen. Sind die Merkmale irgendwelche reellen Zahlen aus einem Intervall (z.B. Gewicht, Länge, ...), so spricht man von kontinuierlichen Merkmalen. Letztere werden durch Klassierung zu diskreten Merkmalen.
- Nennen wir den Vektor $\mathbf{x}$ und seine Komponenten x_j. Wie ist sein **Mittelwert**, sein **Median** und sein **10%-Quantil** definiert? A.: Mittelwert ist $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$, der Median (bzw. 10%-Quantil) ist eine Zahl mit der Eigenschaft, das etwa die Hälfte (bzw. 10%) aller erhobenen Werte kleiner und die andere Hälfte (bzw. 90%) größer ausfällt. Das ist nicht ganz präzise. Für eine präzise Definition muss ich erst erklären, was die zugehörige **Verteilungsfunktion** ist.
- Stellen Sie sich vor, Sie machen eine Stichprobe vom Umfang $n = 100$, indem Sie 100-mal drei Würfel werfen und ihre Augensumme notieren. Erklären Sie an Hand dieses Beispiels den Zusammenhang zwischen **Mittelwert** einer Stichprobe und **Erwartungswert** einer Zufallsvariable. A.: Die Augensumme ist eine Zufallsvariable, deren Erwartungswert so etwa bei 10 liegen dürfte. Wenn man hinreichend viele Versuche macht, so besagt das Gesetz der großen Zahl, dass der Mittelwert der Stichprobe (Versuchsreihe) mit wachsendem Umfang der Stichprobe gegen den Erwartungswert konvergiert (wenn die Würfel perfekt sind).
- Was versteht man unter der **(empirischen) Varianz** einer Stichprobe? A.:

  $$\frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2}{n-1}.$$

  Dies ist fast die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert $\overline{x}$.
- (Einserfrage) Erklären Sie kurz den Begriff **Korrelation**. A.: Gegeben sind zwei Stichprobenvektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ gleichen Umfangs mit Mittelwerten $\overline{x}$ und $\overline{y}$ (z.B. die Länge und das Gewicht von n Menschen). Anschaulich würde man von Korrelation reden, wenn positive (negative) $x_k - \overline{x}$ auch stets positive (negative) $y_k - \overline{y}$ zur Folge hätten. Vielleicht nicht immer, aber häufig. Hier bietet sich an, den Wert (ein Sklalarprodukt zweier Vektoren!)

  $$S_{xy} := \sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}) \tag{1}$$

zu betrachten. In den *Korrelationskoeffizient* r_{xy} zwischen den Stichprobenvektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ geht diese Zahl entscheidend ein:

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}.$$

Er liegt zwischen -1 und 1.

Man kann die beiden Stichprobenvektoren auch zu einer „Punktwolke“ $(x_k, y_k), k = 1, 2, ..., n$ zusammenstellen. Je eher eine Gerade erkennbar ist, desto „korrelierter“ sind die beiden Merkmale.

Stochastik

1. **W-Modell**

- Was versteht man unter einem diskreten W-Modell? Antwort: Der **Merkmalraum** Ω muss endlich oder wenigstens abzählbar sein. Zwischenanmerkung: Beschränken Sie sich ruhig auf den endlichen Fall. Weiter: Bezeichnet man die Elemente von Ω mit $\omega_1, ..., \omega_m$ — sie heißen **Elementarereignisse** —-, so müssen diese **Elementar-Wahrscheinlichkeitn** $p_j = P(\omega_j), j = 1, ..., m$ besitzen, die nichtnegativ sind und sich zu Eins aufaddieren:
$$\sum_{j=1}^{m} p_j = 1.$$
- Wie hängt dies mit den **Kolmogoroff-Axiomen** zusammen? Antwort: Ist P ein W-Maß auf dem Merkmalraum Ω, so muss $P(\Omega) = 1$ gelten. Für disjunkte **Ereignisse** A und B muss $P(A + B) = P(A) + P(B)$ gelten. Aus diesen beiden Eigenschaften (Ω ist die disjunkte Vereinigung aller Elementarereignisse) ergeben sich die obige Bedingung $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$. Dass $p_j \geq 0$ gilt, folgt daraus, dass $P(A) \geq 0$ für jedes Ereignis A gelten muss.
- Geben Sie das einfachste diskrete W-Modell an.

  Antwort: a) Bernoullimodell $B(p)$ mit einem Parameter p. Hier ist $\Omega = \{0, 1\}$ und $P(1) = p$, woraus $P(0) = 1 - p$ folgt. Beispiel: Münzwurf mit $p = \frac{1}{2}$ und der Codierung “Wappen=0“ und „Zahl=1“.

  Antwort b) **Laplace-Modell**: Alle Elementarereignisse sind gelichwahrscheinlich.
- Auf welches Modell stößt man, wenn man das Bernoullimodell n-mal wiederholt? Antwort: **Binomialmodell** $B(n, p)$. Der Merkmalraum hat die $n + 1$ Elemente $0, 1, 2, ..., n$, also $\Omega = \{0, 1, ..., n\}$, wenn man als Zufallsvariable X die Anzahl der Einsen betrachtet. Die **Elementar-Wahrscheinlichkeiten** sind
$$b(n, p; j) := p_j = \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j}.$$

- Wie sieht der Merkmalraum aus, wenn man sich für die Reihenfolge der Nullen und Einsen interessiert? Antwort: Jedes Ergebnis ist ein n-Tupel aus Nullen und Einsen, also aus $\Omega := \{0,1\}^n$. Die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes n-Tupel mit genau j Einsen ist $p^j(1-p)^{n-j}$. Nehmen wir z.B. $n = 5$ und $j = 3$. Die Wahrscheinlichkeit für das spezielle 5-Tupel $(0,1,1,1,0)$ ist $p^3(1-p)^2$.
- Was für eine Annahme wird bei der Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten stillschweigend benutzt? Antwort: Die stochastische Unabhängigkeit der Bernoulliexperimente.
- Können Sie jetzt die Formel

  $$b(n,p;j) := p_j = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

  begründen? Antwort: Ja. Es gibt $\binom{n}{j}$ solcher n-Tupel mit j Einsen.
- Können Sie ein Urnenmodell für das Binomialmodell geben?

  Antwort: Man stelle sich eine Urne mit roten und schwarzen Kugeln vor. Es werde mit Zurücklegen gezogen. Als einen „Treffer“ bezeichne man den Fall, dass eine rote Kugel gezogen wird. Die Wahrscheinlichkeit hierfür sei p (der Anteil der roten Kugeln an allen Kugeln). Es werde n-mal gezogen. Dann ist $b(n,p;j)$ die Wahrscheinlichkeit, dass genau j Treffer vorliegen.

2. **Wahrscheinlichkeit von Ereignissen**

   - Was ist ein **Ereignis**? A.: Eine Teilmenge A des Merkmalraums. Z.B. beim Würfeln mit zwei Würfeln das Ereignis „Pasch“, d.h. $A := \{(1,1),(2,2),...,(6,6)\}$.
   - Wie berechnet man empirisch die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ (Stichwort: Gesetz der großen Zahl)? A.: Man führt das Zufallsexperiment sehr oft aus und approximiert $P(A)$ durch die relative Häufigkeit von A. Gesetz der großen Zahl.
   - In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird der Begriff Wahrscheinlichkeit axiomatisch eingeführt. Nennen Sie einige der Kolmogoroff-Axiome! A.: Skript Def. 3.2.
   - Veranschaulichen Sie diese Axiome zeichnerisch. A.: Skript Abb. 3.2-3.5.
   - Wie berechnet man $P(A)$ beim **Laplacemodell**? A.: Anzahl der „günstigen“ Fälle dividiert durch alle möglichen Fälle,

     $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

3. **Binomialkoeffizienten** (Vorstufe der Binomialverteilung)

   - Kombinatorische Definition? A.: $\binom{n}{k}$ (lies: n über k) ist die Anzahl der Möglichkeiten aus n Dingen $k \leq n$ Dinge auszuwählen, kurz: k aus n (Beispiel: Lotto: 6 aus 49). Oder auch: Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

- **Binomische Formel**? A.:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

- Berechnung mit dem **Pascaldreieck**? A.: Siehe Skript Mathe I
- Symmetrie? Warum? A.: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Mit jeder Auswahl von k Dingen werden gleichzeitig diejenigen $n-k$ Dinge ausgewählt, die nicht dazu gehören.
- Rekursion, die der Berechnung im Dreieck zugrunde liegt? A.:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

- Begründung? A.: Ein Element der n-elementigen Menge werde markiert. Gehört es nicht zu den k Ausgewählten: Davon $\binom{n-1}{k}$ Möglichkeiten (k aus $n-1$). Gehört es dazu: Hiervon gibt es $\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten ($k-1$ aus $n-1$).
- Begründung der Binomischen Formel? A.: Beim Ausmultipliziern der n Faktoren von

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$$

  treten Terme der Form $a^k b^{n-k}$ auf , wobei in k Faktoren a, in den restlichen $n-k$ Faktoren b ausgewählt wird. Hierfür gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.
- Binomialmodell? A.: Siehe Frage zuvor.

4. **Verteilungsfunktion**

- Erklären Sie den Begriff **Verteilungsfunktion** für ein diskretes, quantitatives W-Modell. A.: Skript Def. 3.8.
- Unterschied zwischen W-Verteilung und Verteilungsfunktion? A.: Ersteres ist ein W-Vektor, den man durch ein Balkendiagramm veranschaulichen kann. Das zweite ist eine monoton wachsende Treppenfunktion (Skript Abb. 3.7, 3.8).
- Wie sieht eine Verteilungsfunktion bei kontinuierlichen Modellen aus? A.: Aus der Treppenfunktion wird eine stetige, monoton wachsende Funktion, beginnend bei Nulle, endend bei Eins. Beispiel: Rechtecksverteilung, Normalverteilung (Abb. 3.11).

5. **Zufallsvariable**

- Was ist eine **Zufallsvariable**? Antwort: Ein quantitatives Ergebnis eines **Zufallsexperiment**s. Ist Ω der **Merkmalraum**, so ist eine Zufallsvariable eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

- Beispiel? Antwort: Zwei Würfel, $\Omega = \{1, ..., 6\}^2, X :=$ Augensumme. Oder. Zufallsexperiment ist Fiebermessen am Krankenbett. $X :=$ Temperatur. Oder: Wartezimmer beim Arzt. $X :=$ Zeit, die zwischen der Ankunft zweier Patienten verstreicht.
- Wann ist eine Zufallsvariable **diskret** (mit Beispiel)? Antwort: Wenn sie nur endlich (oder abzählbar unendlich) viele Ergebnisse $x_k, k = 1, 2, .., m$ annnehmen kann. Z.B. ist das bei der Augensumme von Würfeln der Fall.
- Was versteht man unter der **Verteilung einer diskreten Zufallsvariablen**? Antwort: Die Wahrscheinlichkeiten $p_k = P(X = x_k), k = 1, ..., m$ zu einem Vektor zusammengestellt.
- Frage nach **Kenngrößen** von Zufallsvariablen (**Erwartungswert, Varianz, Streuung, Median, Quantile**. Man sollte die Formeln für diskrete Zufallsvariable kennen. Siehe Kap. IV.3.9

6. **Stochastische Abhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeiten**

- Beispiel für zwei stochastisch abhängige Ereignisse? A.: Wurf mit zwei Würfeln. Ereignis A :=„Pasch“, B:=„Augensumme $\geq$ 11“. Dann ist $P(A) = \frac{1}{6}$, aber $P(A|B) = \frac{1}{3}$.
- Wann heißen zwei Ereignisse A und B stochastisch unabhängig? A.: Wenn $P(A) = P(A|B)$ oder wenn $P(AB) = P(A)P(B)$.
- Welche Rolle spielt die stochastische Unabhängigkeit beim Binomialmodell? A.: Das Ergebnis eines jeden Bernoulli-Experiments muss stochastisch unabhängig von den anderen Ergebnissen sein. Das erreicht man beim Urnenmodell, indem man zurücklegt und gut mischt.

7. **Kontinuierliche Zufallsvariable**

- Stellen Sie sich vor, ein Stab der Länge 3m wird an irgendeiner, zufällig ausgewählten Stelle durchtrennt. Die Schnittstelle kann als Zahl $x \in (0, 3)$ mathematisch erfasst werden. Hierdurch ist eine kontinuierliche Zufallsvariable definiert. Zeichnen Sie ihre Verteilungsfunktion und die Wahrscheinlichkeit-Dichte, wenn alle Schnittstellen gleichwahrscheinlich sind. A.: Die Dichte hat die Form eines Rechtecks der Höhe $\frac{1}{3}$ über dem Intervall $[0, 3]$, an allen anderen Punkten $x < 0$ und $x > 3$ hat sie den Wert Null. Die Verteilungsfunktion ist Null bis $x = 0$, steigt dann bis $x = 3$ linear auf das Niveau Eins an, um danach dort zu verharren.
- Wie heißt die wichtigste kontinuierliche Zufallsvariable? A. **Normalverteilung**, Gestalt einer Glockenkurve.
- Beschreiben Sie die in Abb. 2 abgebildete Grafik.

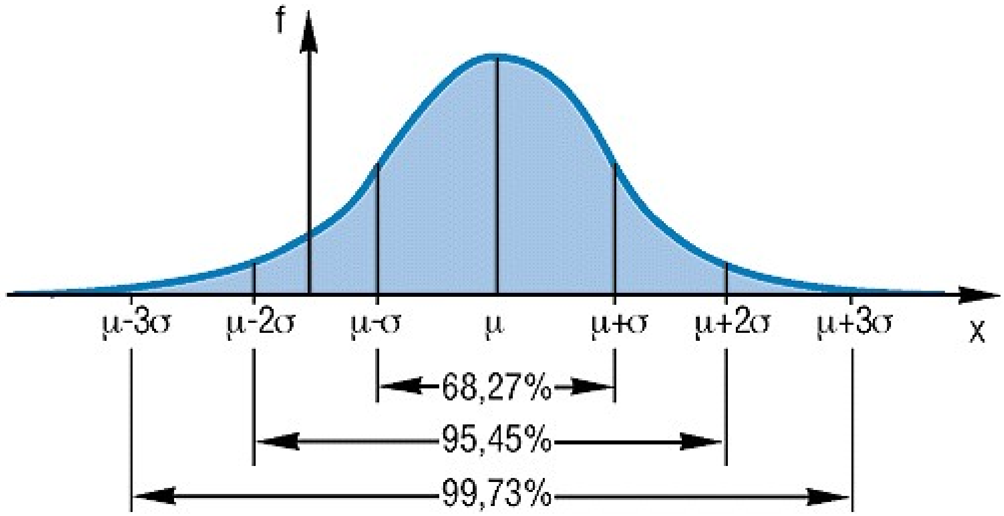

Abbildung 2: Periodische Funktion

A.: Die Normalverteilung hat zwei Parameter, μ, der Erwartungswert, und σ, die Streuung. 68,27% aller Werte einer normalverteilten Zufallsvariable liegt im Streuintervall, 95,45% im Intervall mit zweifacher Streuung, 99,27% in einem Intervall mit dreifacher Streuung.

- Nehmen wir an, Sie vergeben in einer Arbeit maximal 100 Punkte und die Ergebnisse der Schülerinnen seien normalverteilt mit Mittelwert 60 und Streuung 10. Wieviel Prozent haben dann weniger als 50 Punkte? A.: Die Hälfte von 31,73%, also rund 16%

Zahlentheorie, Gruppen

1. **Verknüpfungen bei Gruppen**

- Bei **Gruppen** spielen sog. **Verknüpfungen** eine Rolle. Beispiele? A. Am bekanntesten sind die Verknüpfungen der Addition und Multiplikation, die $(\mathbb{R}.+)$, bzw. $(\mathbb{R}^\star, \cdot)$, wobei $\mathbb{R}^\star$ die Menge der reellen Zahlen ohne die Null ist, zu einer Gruppe machen.

  Aber auch die Verkettung von Abbildungen kann eine (i.A. nicht-kommunative) Verknüpfung sein. Diese tritt bei der **symmetrischen Gruppe** S_n aller **Permutationen** (Bijektionen) der Menge $\{1, 2, ..., n\}$ auf.

- Können Sie ein Beispiel geben, dass die Verkettung von zwei Abbildungen keine kommutative Verknüpfung ist (Hinweis: Symmetrie eines gelciseitigen Dreiecks). A.: Wenn ich erst an einer Mittelsenkrechten spiegel (Abbildung S) und dann um 120 Grad gegen den Uhrzeigersinn drehe (Abbildung R), erkennt man, dass $R \circ S \neq S \circ R$.

- Kennen Sie Verknüpfungen, die nicht notwendig zu Gruppen, wohl aber zu **Gruppoiden** führen? A.: Die Vereinigung oder der Durchschnitt von Mengen, die Verknüpfung von Aussagen mit dem logischen Operatoren *und, oder*, die Summe oder das Produkt von Matrizen, die Summe von Vektoren, ...
- Was wäre bei der *Vereinigung* von Mengen das neutrale Element? A.: Die leere Menge.

2. **Rechnen mit Resten**

- Bei dem Rechnen mit Resten bei der Division mit n treten **Gruppen** auf. Erläutern Sie dies. Antwort: Mögliche Reste sind $0, 1, .., n-1$, die man zu $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, ..., n-1\}$ zusammenfasst. Die **Modulo**-Rechnung $k \bmod n$ ergibt den Rest, wenn man k durch n dividiert. Die „Modulo-Addition" $+_n$ wird durch

$$j +_n k := (j + k) \bmod n$$

  definiert. $\mathbb{Z}_n$, versehen mit dieser Modulo-Addition, ist eine Gruppe.
- Stellen Sie sich eine Uhr mit Zeigern vor, die die Stunden von 0 (12), 1, 2, ..., 11 anzeigt. Können Sie hier die modulo-Addition erläutern? A.: 3 Stunden nach 11 Uhr steht der Stundenzeiger auf 2 Uhr . Es ist $n = 12$.
- Welches ist das **neutrale Element**, wie berechnet man die (additiven) **Inversen**? Antwort: Das neutrale Element ist 0, das Inverse von k ist $n - k$.
- Wenn man ganz analog eine Modulo-Multiplikation definiert, erhält man dann auch eine Gruppe? Antwort: Wenn überhaupt, muss man die Null rausnehmen, da diese keine (multiplikative) Inverse besitzt, also

$$Z_n^\star := \{1, 2, .., n-1\}$$

  betrachten.
  Nur solche Zahlen $m \in \mathbb{Z}_n$ besitzen ein multiplikatives Inverses, die zu n **teilerfremd** sind. Z.B. besitzt $m = 2$ in $\mathbb{Z}_4$ kein multiplikatives Inverses, da 2, multipliziert mit irgend einem $k \in \mathbb{N}$ bei Division durch n niemals den Rest 1 haben kann.

3. **Diedergruppe**

- Wie kann man die **Symmetrie eines gleichseitigen Dreiecks** beschreiben? Antwort: Die Diedergruppe D_3, bestehend aus den drei **Spiegelungen** an den Winkel- (Seiten-) Halbierenden und den drei **Drehungen** um 0, 120 Und 240 Grad.
- Zeichne ein gleichseitiges Dreieck und eine Winkelhalbierende. Sei S die Spiegelung an dieser Winkelhalbierenden und R eine Drehung um 120 Grad im mathematisch positiven Sinn. Was ist R verknüpft mit S und S verknüpft mit R? Antwort: Beides sind wieder Spiegelungen, aber verschieden. Ersteres ist die Spiegelung an der Winkelhalbierenden, die auf der gegebenen gegen den Uhrzeigersinn folgt.

- Dies ist ein Beispiel, wo die Gruppenelemente Abbildungen sind. Ist das auch bei der sog. **Permutationsgruppe**, auch **symmetrische Gruppe** der Ordnung n genannten Gruppe so?

  Antwort: Ja. Hier ist $X = \{1, 2, ..., n\}$ eine Menge der **Mächtigkeit** n. Dann ist die Gruppe S_n die Menge aller **Bjektionen** von X.

- Wieviele Elemente hat S_n? Antwort: $n!$ Begründung: Für das erste Element von X gibt es noch n mögliche Bilder, für das zweite nur noch $n-1$, da es ein anderes Bild als das erste haben muss. Nach dem „Produktsatz“ der Kombinatorik gibt es dann $n(n-1)$ mögliche Kombinationen fr das erste und zweite Element von X. Fährt man so fort, erhält man $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$ Kombinationen (hier Permutationen).

4. **Zahlen**

- Was sind **rationale Zahlen**? Antwort: Alle Brüche $\frac{p}{q}$ mit ganzen Zahlen p und q.
- Gibt es auch nicht-rationale Zahlen? Antwort: Ja, **irrationale Zahlen** wie $\sqrt{2}$, Kreiszahl π und eulersche Zahl e..
- Warum ist $\sqrt{2}$ irrational? Antwort: Siehe Skript. Skizzierung des Beweises (Angenommen, $x = \frac{p}{q}$ erfüllt $x^2 = 2$........)
- Wie erkennt man an **Dezimalbrüchen**, ob eine Zahl rational ist oder nicht? Antwort: Endliche oder unendlich-periodische Dezimalbrüche.
- Gibt es mehr rationale oder mehr irrationale Zahlen? Antwort: Es gibt jeweils unendlich viele, aber nur **abzählbar unendlich viele** rationale Zahlen, aber **überabzählbar** unendlich viele irrationale Zahlen.
- Begründung? Antwort siehe Skript (Einserfrage).
- **Komplexe Zahlen** kann man durch Punkte der **Gauß'schen Zahlenebene** darstellen. Wo liegt die **imaginäre Einheit** i? Welche relle quadratische Gleichung wird von ihr gelöst?

  Antwort: $(0, 1)$, Gleichung $x^2 = -1$. Die imaginäre Einheit liegt auf der Ordinate.
- Wie bezeichnet man eine komplexe Zahl z mit **Realteil** a und **Imaginärteil** b? Antwort: $z = a + ib$.
- Erklären Sie, wie man komplexe Zahlen addiert und multipliziert. Antwort: Siehe Skript.
- Welche Beziehung besteht zwischen den **Polarkoordinaten** r und α auf der einen und den kartesischen Koordinaten a und b einer komplexen Zahl z auf der anderen Seite? Antwort:

  $$a = r\cos\alpha, b = r\sin\alpha,$$

  Zeichnung!!

- Wie kann man die Multiplikation komplexer Zahlen in Polarkoordinaten deuten? Antwort: Addition von Winkeln, Multiplikation der Abstände zum Nullpunkt.
- Wie lautet die schönste Formel der Mathematk? Antwort:

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

- Warum bilden alle komplexen Zahlen vom Betrag Eins eine Gruppe? A.: Alle diese Zahlen bilden in der Gauß'schen Zahlenebene den Einheitskreis. Multipliziert man zwei solcher Zahlen, so bleibt der Betrag unverändert (Eins), die Winkel addieren sich.

Analytische Geometrie

1. **Geraden**

   - Wie lautet die **Parameterdarstellung** einer Geraden $\mathcal{G}$ in der Ebene oder im Raum? A. (Kap. II.2.7). Iste in Punkt P und ein Richtungsvektor $\mathbf{v}$ der Geraden gegeben, so ist
   $$\mathcal{G} := \{P + l\mathbf{v} : l \in \mathbb{R}\}.$$
   Zu jedem Parameter l gibt es einen Punkt $P + l\mathbf{v}$ der Geraden. In der Ebene ist dies eine Art Punkt-Steigungsform.
   - Gibt es auch eine **Koordinatenform** einer Geraden? A.: Nur ind er Ebene. Hier gilt
   $$\mathcal{G} := \{(x, y) : ax + by = c\},$$
   wobei a und b Koeffizienten sind, die nicht beide verschwinden dürfen.
   - Wie kann man den Vektor (a, b) geometrisch interpretieren? Antwort: **Normalenvektor** auf $\mathcal{G}$.
   - In der Schule betrachtet man auch Geraden mit der Funktionsgleichung $y = mx + b$. Wie passt die hier hinein? A.: Umschreiben ergibt $mx - y = -b$. Dies ist offensichtlich eine spezielle Koordinatenform. Der Vektor $(m, -1)$ steht senkrecht auf der Geraden. Dies korrespondiert damit, dass m die Steigung der Geraden ist.

2. **Ebenen**

   - Was versteht man unter der **Koordinatenform** einer **Ebene** im **dreidimensionalen Raum**? Antwort:
   $$\mathcal{E} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$$
   wobei a, b, c, d gegebene Zahlen sind, die die Ebene charakterisieren. a, b und c dürfen nicht alle Null sein.

- Wie kann man den Vektor (a, b, c) geometrisch interpretieren? Antwort: **Normalenvektor** auf $\mathcal{E}$.
- Begründung? Antwort: Der **Verbindungsvektor** $\mathbf{v} :== (v_1, v_2, v_3)$ zweier Punkte der Ebene muss $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ erfüllen (Man schreibe für die beiden Punkte die Ebenengleichungen hin und subtrahiere diese). Daher ist das **Skalarprodukt** aus $\mathbf{v}$ und $\mathbf{a} := (a, b, c)$ Null, die beiden Vektoren sind also **orthogonal**.
- Zwei Ebenen unterscheiden sich nur durch die vierte Zahl d. Was weiß man über sie? Antwort: Die beiden Ebenen sind **parallel**.
- **Hessesche Normalform**? Antwort: Liegt vor, wenn die **Länge** von $\mathbf{a} = (a, b, c)$ gleich Eins ist.
- Konsequenz? Antwort: $|d|$ ist der **Abstand** der Ebene zum Ursprung.