Kettenbrüche

Bodo Werner
„Probevorlesung“ für Erstsemester
mailto:werner@math.uni-hamburg.de

16. April 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Dieses Skript war die Grundlage einer 90-minütigen „Probevorlesung“ für Erstsemester von Mathematik-Studiengängen im WiSe 07/08 im Rahmen der Orientierungseinheit. Der Vorlesung folgten Arbeitsgruppen, Tutorien, Präsenzübungen sowie die Besprechung der Lösung von

Übungsaufgaben. Die zugehörigen Aufgaben samt Lösungen finden sich in Kap. 6 (Präsenzaufgaben) und Kap. 7 (Übungsaufgaben).
Ich halte den Inhalt für diesen Zweck für sehr gut geeignet, auch im Sinne der Fortführung des Vorkurses, da wichtige Prinzipien (rational-irrational, rekursiv definierte Folgen, rationale Funktionen, vollständige Induktion, Ungleichungen) angesprochen werden und auch in meinen Augen „schöne“ Mathematik (Goldener Schnitt, Fibonaccizahlen, quadratische Irrationalitäten) im Spiel ist. Allerdings handelt es sich um wirklich „viel Stoff“— den könnte man reduzieren, wenn ein Wiederholungsfall angedacht wird, indem der Zusammenhang zwischen periodischen Kettenbrüchen und quadratischen Irrationalitäten nur exemplarisch angesprochen wird.

2 Einführung

In dieser Vorlesung geht es um (positive) rationale und irrationale Zahlen und ihre Darstellung durch *Kettenbrüche*. Dabei sind rationale Zahlen (unkürzbare) Brüche $\frac{p}{q}$ mit natürlichen Zahlen p und q. Irrationale (nicht rationale) Zahlen sind weniger gut greifbar. So ist die positive Lösung $x = \sqrt{2}$ der Gleichung $x^2 = 2$ keine rationale Zahl. Am üblichsten ist die *Darstellung* von Zahlen durch *Dezimalbrüche* $a_0, a_1a_2a_3a_4......$ mit Ziffern $a_1, a_2, ...$ aus $\{0, 1, 2, ..., 9\}$. Von diesen weiß man aus der Schule (?), dass endliche Dezimalbrüche stets rationale Zahlen in Form von Brüchen mit einer Zehnerpotenz im Nenner darstellen und dass andere rationale Zahlen durch *unendliche*, aber ab einer Ziffer *periodische* Dezimalbrüche dargestellt werden. Z.B. wird

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$$

durch einen periodischen Dezimalbruch dargestellt, wobei sich der Block 142857 immer wiederholt:

$$\frac{1}{7} = 0,142857\,142857\,142857\,142857\,142857\,142857......$$

Auch der erst ab der dritten Nachkommastelle periodische Dezimalbruch

$$0,55\overline{142857}$$

stellt einen Bruch dar (welchen?). Unendliche, nicht periodische Dezimalbrüche stellen niemals Brüche, sondern immer irrationale Zahlen dar. So kann man sich irrationale Zahlen gut vorstellen.

Gibt man sich eine beliebige Zahl ω vor, so kann man sich die Frage stellen, welche (unkürzbaren) Brüche $\frac{p}{q}$ mit vorgegebenem Höchstnenner diese gut *approximieren* (annähern). Nehmen wir z.B. die Kreiszahl π mit dem (unendlichen!) Dezimalbruch

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510.....$$

Dann erhält man z.B. die Näherung $3,14 = \frac{314}{100}$. Aber $\frac{22}{7} = 3.14285714....$ hat einen viel kleineren Nenner und ist eine deutlich bessere Näherung für π.

Eine noch bessere Näherung ist der *Kettenbruch*

$$\frac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = 3,141592|92...$$

Ein anderes Beispiel für einen Kettenbruch ist

$$\frac{p_k}{q_k} := 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots + \cfrac{1}{1}}}}$$

mit k Bruchstrichen. Man rechnet leicht nach, dass $\frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{2}, \frac{p_2}{q_2} = \frac{5}{3}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{8}{5}, \frac{p_4}{q_4} = \frac{13}{8}, ...$ Zähler und Nenner sind aufeinanderfolgende Fibonaccizahlen. Man kann relativ leicht zeigen, dass $\frac{p_k}{q_k}$ für $k \to \infty$ gegen die große Goldene Schnittzahl $\Phi := \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$ konvergiert. Φ ist in einem gewissen Sinne die „irrationalste" Zahl. Sie lässt sich durch den *unendlichen Kettenbruch*

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

darstellen, ein Spezialfall eines unendlichen Kettenbruchs mit den „Koeffizienten" a_k (natürliche Zahlen)

$$\omega = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_k + \ddots}}}}$$

In dieser Vorlesung wird u.a. gezeigt (oder auch nur angedeutet): Rationale (bzw. irrationale) Zahlen entsprechen gerade den endlichen (bzw. unendlichen) Kettenbrüchen. Die periodischen Kettenbrüche sind gerade sog. „quadratische Irrationalitäten", wie z.B. $\sqrt{2}$ oder die große Goldene Schnittzahl Φ.

Ferner wird der Euklidische Algorithmus zur Berechnung von Kettenbruchdarstellungen eingeführt sowie eine auf Rekursionen beruhende Methode aufgezeigt, wie man zu einem gegebenen endlichen Kettenbruch seinen Wert berechnet.

3 Dezimalbrüche

Man muss zwischen Zahlen und ihren Darstellungen in gewissen Systemen, z.B. dem Dezimalsystem unterscheiden.

Ein **Dezimalbruch** einer Zahl ω mit $0 \leq \omega < 1$ lautet

$$\omega = 0, a_1 a_2 \cdots a_k \cdots$$

mit **Ziffern** $a_k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Ein **endlicher** Dezimalbruch liegt vor, wenn es eine Dezimalstelle n gibt mit $a_k = 0$ für $k > n$. Andernfalls heißt der Dezimalbruch unendlich. Unendliche Dezimalbrüche können **periodisch** sein. Das ist dann der Fall, wenn sich ab der $n$ten Dezimalstelle alle Ziffern nach p weiteren Dezimalstellen wiederholt, wenn also gilt

$$\omega = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \, a_{n+1} \cdots a_{n+p} \, a_{n+1} \cdots a_{n+p} \, a_{n+1} \cdots a_{n+p} \, \cdots$$

mai $a_{n+p} \neq 0$. Hierfür schreibt man auch $\omega = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \, \overline{a_{n+1} ... a_{n+p}}$.
Ersetzt man die Zahl Null vor dem Komma durch irgend eine natürliche Zahl a_0, so kann man jede positive reelle Zahl durch einen Dezimalbruch darstellen.

Es gibt eine einfache Methode, den zu einem periodischen Dezimalbruch gehörenden Bruch zu berechnen. Diese Methode hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der, einen periodischen Kettenbruch als quadratische Irrationalität zu schreiben.
Sei $x := 0, \overline{a_1 a_2 ... a_p}$. Multipliziert man x mit 10^p, so erhält man

$$10^p x = 10^{p-1} a_1 + 10^{p-2} a_2 + \cdots 10 a_{p-1} + a_p + x.$$

Diese Gleichung kann man nach x auflösen:

$$x = \frac{10^{p-1} a_1 + 10^{p-2} a_2 + \cdots 10 a_{p-1} + a_p}{10^p - 1},$$

eine Formel, die viele aus der Schule kennen, aber wahrscheinlich nicht begründen können.
Beispiel: $x := 0, \overline{123} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$.
Dezimalbrüche, die erst ab einer bestimmten Dezimalstelle periodisch sind, können ganz analog in Brüche umgerechnet werden.
Endliche Dezimalbrüche könen auch durch unendlich-periodische Dezimalbrüche dargestellt werden: Beispiel: $0, 2 = 0, 1\overline{9}$.

4 Endliche und unendliche Kettenbrüche

Definition 1. *Ein endlicher* **Kettenbruch** *der* **Ordnung** n *mit* **Koeffizienten** $a_j, j = 0, 1, 2, ...n$, *ist die Zahl*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{1}$$

Dabei ist der führende Koeffizient a_0 *eine natürliche Zahl* ≥ 0*, während die nachfolgenden Koeffizienten* a_j *„echte" natürliche Zahlen* ≥ 1 *sind.*

Man beachte, dass die Ordnung des Kettenbruchs gleich der Anzahl der Bruchstriche ist. Für (1) schreibt man kurz $[a_0; a_1, ..., a_n]$. Offensichtlich ist solch ein endlicher Kettenbruch $[a_0; a_1, ..., a_n]$ eine positive rationale Zahl $\frac{p_n}{q_n}$. Man sagt auch, dass $[a_0; a_1, ..., a_n]$ die rationale Zahl $\frac{p_n}{q_n}$ **darstellt**. Diese Darstellung ist nicht eindeutig[1]. Denn es gilt $[a_0; a_1, ..., a_n] = [a_0; a_1, ..., a_n - 1, 1]$, wenn $a_n \geq 2$ und $[a_0; a_1, ..., a_n] = [a_0; a_1, ..., a_{n-1} + 1]$, wenn $a_n = 1$. Den führenden Koeffizienten a_0 trennt man von dem Rest durch ein Semikolon. Wenn $a_0 = 0$, schreibt man auch kürzer $[a_1, a_2, ..., a_n] := [0; a_1, ..., a_n]$.
Beispiele:

$$[2, 2, 2] = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

und

$$[2, 2, 2, 2] = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$$

[1]Beachte, dass die Darstellung gewisser rationaler Zahlen durch Dezimalbrüche ebenfalls nicht eindeutig ist.

Definition 2. *Man sagt, dass $\omega > 0$ durch einen* **unendlichen Kettenbruch**

$$\omega = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}}$$

darstellbar ist, wenn die endlichen Kettenbrüche n-ter Ordung $[a_0; a_1, ..., a_n]$ gegen ω konvergieren [2]*. Die rationale Zahl $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, ..., a_n]$, die man durch Weglassen aller Bruchstriche ab dem n-ten erhält, heißt* **n-te Konvergente** *von $\omega, n = 0, 1, ...$*

Für den unendlichen Kettenbruch schreiben wir $\omega = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]$. Wenn $0 < \omega < 1$, so ist offensichtlich $a_0 = 0$ und wir schreiben auch $\omega = [a_1, a_2, ..., a_n, ...]$. Man beachte, dass alle Koeffizienten, außer dem führenden a_0, niemals Null sein dürfen. Ein endlicher Kettenbruch ist daher formal kein periodischer Kettenbruch, gemäß:

Definition 3. *Ein* **periodischer** *Kettenbruch hat die Form*

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n, \overline{a_{n+1}, ..., a_{n+p}}] = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{n+p}, a_{n+1}, ..., a_{n+p}, a_{n+1}, ..., a_{n+p}, ...]$$

Definition 4. *Eine quadratische Irrationalität ist eine (irrationale) Zahl x der Form $x = r + s\sqrt{n}$ mit rationalen Zahlen r, s, wobei $s \neq 0$, und einer natürlichen Zahl n, die keine Quadratzahl ist*[3]*.*

Bemerkung: Eine quadratische Irrationalität ist Lösung einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten.

Die Vorlesung hat u.a. die folgenden Ziele:

1. Berechnung eines Kettenbruchs (d.h. ihrer Koeffizienten) zu einer gegebenen reellen Zahl ω (Stichwort: „Euklidischer Algorithmus“)

2. Berechnung der Konvergenten zu gegebenem Kettenbruch (Stichwort: Rekursionsformeln)

3. Beweis von

   Theorem:

[2] Es genügt eine intuitive Vorstellung von Grenzwert. Man hätte auch nur formal unendliche Kettenbrüche einführen kennen und danach zeigen, dass die aufeinanderfolgenden Konvergenten ineinandergeschachtelte Intervalle mit gegen Null konvergierender Länge ergebn, die nach dem Vollständigkeitsaxiom dann eine eindeutige Zahl $\omega > 0$ definieren.

[3] Dann ist $\sqrt{n}$ und auch x irrational.

- Jede positive rationale Zahl lässt sich durch einen endlichen Kettenbruch darstellen, und jeder endliche Kettenbruch stellt eine positive rationale Zahl dar (Letzteres wissen wir schon).
- Jeder unendliche Kettenbruch stellt eine positive irrationale Zahl dar, und jede irrationale Zahl lässt sich durch einen unendlichen Kettenbruch darstellen.
- Jeder periodische Kettenbruch stellt eine quadratische Irrationalität dar und jede quadratische Irrationalität lässt sich durch einen periodischen Kettenbruch darstellen.

4.1 Beispiele

1. Betrachte den unendlichen, periodischen Kettenbruch

$$\Phi := [1; 1, 1, ..., 1, ...] = [1; \overline{1}]$$

mit sämtlichen Koeffizienten $a_j = 1, j = 0, 1, 2, ...$
Man kann leicht zeigen, dass Zähler und Nenner der Konvergenten von Φ aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen sind. Man kann auch herausfinden, gegen welche Zahl der unendliche Kettenbruch $[1; 1, 1, 1, ...]$ konvergiert. Hier gibt es einen Trick, indem man jeweils den „Schwanz" des Kettenbruches betrachtet, der wieder den Wert Φ hat. Daher folgt

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$

Dies führt auf eine quadratische Gleichung $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, deren positive Lösung $\Phi := \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ die **große Goldene Schnittzahl** ist, offensichlich eine quadratische Irrationalität.
Genauso zeigt man, dass $[\overline{1}]$ die **kleine Goldene Schnittzahl** $\varphi = \Phi - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ist.

2. Welche Zahl wird durch den unendlichen Kettenbruch $[1; 2, 2, 2, ...] = [1; \overline{2}]$ dargestellt?

4.2 Theorie

Sei jetzt ein unendlicher Kettenbruch mit den Koeffizienten $a_j, j = 0, 1, 2, ...$ gegeben.
Ersetzt man in dem endlichen Kettenbruch $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ den letzten Koeffizienten $a_n \geq 1$ durch $a_n + x$ mit einer beliebigen reellen Zahl $x \geq 0$, so schreiben wir für den Wert auch

$$f_n(x) := [a_0; a_1, a_2, ..., a_n + x] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + x}}}}$$

Um was für eine Funktion handelt es sich bei f_n? Es ist $f_0(x) := a_0 + x$, $f_1(x) := a_0 + \frac{1}{a_1+x} = \frac{a_0a_1+1+a_0x}{a_1+x}$ — eine gebrochen rationale Funktion. Für $a_0 := 0$ lautet $f_1(x) = \frac{1}{a_1+x}$.
Ferner berechnet sich

$$f_2(x) = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + x}} = a_0 + \frac{a_2 + x}{a_1a_2 + 1 + a_1x} = (a_0+a_2+a_0 \cdot a_1 \cdot a_2+(a_0 \cdot a_1+1)x)/(a_1 \cdot a_2+1+a_1x)$$

ebenfalls eine gebrochen rationale Funktion der Ordnung 1. Für $a_0 := 0$: $f_2(x) = \frac{a_2+x}{a_1 \cdot a_2+1+a_1x}$.

Ferner notieren wir vier Eigenschaften von f_n, die man sofort ablesen kann:

$$f_n(0) = [a_0; a_1, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n} \tag{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = [a_0; a_1, ..., a_{n-1}] = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \tag{3}$$

$$f_n\Big(\frac{1}{a_{n+1}}\Big) = [a_0; a_1, ...a_n, a_{n+1}] = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \tag{4}$$

$$\exists y_n > 0 : f_n(y_n) = \omega \tag{5}$$

Definition 5. *Eine reelle Funktion* $f(x) := \frac{a+bx}{c+dx}$ *nennen wir* **rationale Funktion**. *Wenn zusätzlich die vier Zahlen* a, b, c, d *nichtnegative ganze Zahlen mit* $|bc-ad| = 1$ *sind, so nennen wir* f **unimodular**. *Die Zahl* $bc - ad$ *nennen wir das* **Vorzeichen** V_f *von* f.

Man berechnet für unimodulare Funktionen f ihre Ableitung zu $f'(x) = \pm\frac{1}{(c+dx)^2}$, wobei $V_f := bc - ad = \pm 1$ ihr Vorzeichen ist. Es gibt also wachsende (Vorzeichen $bc - ad = 1$) und fallende (Vorzeichen $bc - ad = -1$) unimodulare Funktionen. Ferner sind sowohl a und c als auch b und d teilerfremd — dies folgt aus $|bc - ad| = 1$.

Satz 6. *Seien* $a_0 \in I\!N_0$ *und* $a_j \in I\!N, j = 1, 2, ..., n$ *beliebige ganze Zahlen. Sei* $f_n(x) := [a_0; a_1, a_2, ..., a_n + x]$. *Dann ist* f_n *unimodular, mit Vorzeichen 1 (wachsend) für gerade* n *und Vorzeichen -1 (fallend) für ungerade* n.

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt $f_0(x) = a_0 + x$. Da man auch $a_0 + x = \frac{a_0+1 \cdot x}{1+0 \cdot x}$ schreiben kann, ist f_0 unimodular mit Vorzeichen 1.
Induktionsannahme: Sei der Satz wahr für ein festes $n \in \mathbb{N}$, d.h. sei f_n für beliebige Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$ unimodular und v ihr Vorzeichen, $v = 1$ für gerade und $v = -1$ für ungerade n.
Induktionsschluss: Wir betrachten $f_{n+1}(x) = [a_0; a_1, ..., a_n, a_{n+1} + x]$. Der Trick (Induktionsschlüssel) besteht darin zu erkennen, dass

$$f_{n+1}(x) = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, ..., a_{n+1} + x]}$$

und dass wir wegen der Induktionsannahme wissen, dass

$$\tilde{f}_n(x) := [a_1; a_2, ..., a_{n+1} + x]$$

unimodular ist mit Vorzeichen v, dass also $\tilde{f}_n(x) = \frac{a+bx}{c+dx}$ und $bc - ad = v$ gilt. Daher folgt dass

$$f_{n+1}(x) = a_0 + \frac{1}{\frac{a+bx}{c+dx}} = \frac{a_0 a + c + (a_0 b + d)x}{a + bx}$$

eine rationale Funktion mit nichtnegativen ganzen Zahlen als Koeffizienten ist, deren Vorzeichen $\tilde{v} = (a_0 b + d)a - (a_0 a + c)b = da - cb = -v$ gerade entgegengesetzt zum Vorzeichen v von f_n (und insbesondere den Betrag 1 hat) ist. ∎

Man kann eine wichtige Beziehung zwischen den vier Koeffizienten a, b, c, d der unimodularen Funktion f_n und den Konvergenten $\frac{p_n}{q_n}$ von $\omega := [a_0; a_1, ..., a_n, ...]$ herstellen:

Satz 7. *Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konvergenten und der unimodularen Funktion $f_n(x)$ von ω besteht der folgende Zusammenhang:*

$$f_n(x) = \frac{p_n + x p_{n-1}}{q_n + x q_{n-1}}, \; n = 1, 2, ...$$

Beweis: Es ist wegen (2) $f_n(0) = [a_0; a_1, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ die n-te Konvergente, die per Definition in gekürzter Form vorliegt. Wir wissen, dass f_n unimodular ist, dass also $f_n(x) = \frac{a+bx}{c+dx}$ mit ganzen Zahlen a, b, c, d gilt, wobei $f_n(0) = \frac{a}{c}$. Auch a und c sind teilerfremd — also gilt $a = p_n$ und $c = q_n$. Bleibt $b = p_{n-1}$ und $d = q_{n-1}$ zu zeigen. Nun gilt ja (3)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a + bx}{c + dx} = \frac{b}{d}$$

andererseits (siehe (3)) $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty}[a_0; a_1, ..., a_n + x] = [a_0; a_1, ..., a_{n-1}]$. Dieser Bruch ist per Definition $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, die $(n-1)$te Konvergente. ∎

Dabei ist $p_0 := a_0, q_0 := 1$ ($\frac{a_0}{1}$ die nullte Konvergente von ω) und $p_1 := a_0 a_1 + 1, q_1 := a_1$ ($\frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$ ist die erste Konvergente von ω).

Ferner folgt aus (3), dass

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + \frac{1}{a_{n+1}} p_{n-1}}{q_n + \frac{1}{a_{n+1}} q_{n-1}}$$

sowie nach leichter Umrechnung

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

und damit eine **Rekursionsformel** für die Zähler und Nenner der Konvergenten:

Satz 8. *Es gilt für die Zähler- und Nenner der Konvergenten die Rekursion*

$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1},\ q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}, n = 1, 2, ..., p_0 := a_0, q_0 := 1, p_1 := a_0 a_1 + 1, q_1 := a_1.$

Beispiel: Für $\Phi = [1; 1, 1, 1, 1, ...]$ erhält man die Fibonacci-Rekursion!

Satz 8 erlaubt eine effiziente Berechnung der Konvergenten bei gegebenen Koeffizienten eines Kettenbruchs! Damit ist ein Ziel erreicht.

Wir können noch mehr herausfinden: Da f_n für gerade n wachsend und für ungerade n fallend ist und es (siehe (5)) ein $x > 0$ geben muss mit $f_n(x) = \omega$, so folgt aus $f_n(0) = \frac{p_n}{q_n}$, dass die Konvergenten $\frac{p_n}{q_n}$ abwechselnd untere (für gerade n) und obere Schranken (für ungerade n) von ω sind:

Satz 9. *Für gerade n gilt*

$$\frac{p_n}{q_n} < \omega < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}},$$

für ungerade n

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \omega < \frac{p_n}{q_n}.$$

Es gilt

$$\left|\omega - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_{n+1}q_n} \leq \frac{1}{a_{n+1}q_n^2} \tag{6}$$

Es muss nur noch (6) gezeigt werden: Da f_{n+1} unimodular ist, folgt aus Satz 7, dass $|p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}| = 1$ und daher wegen

$$\left|\omega - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}}{q_n q_{n+1}}$$

und $q_n \geq a_n q_{n-1}$ (dies folgt aus der Rekursionsformel) die Ungleichung (6). ∎

Die Gleichung (6) hängt mit der *Farey-Nachbarschaft* zusammen [4].

Satz 9 kann man sich sehr schön veranschaulichen, wenn man den Graphen von f_n, insbesondere im positiven Quadranten zeichnet. Es gilt ja

$$f_n(x) = \frac{p_n + p_{n-1}x}{q_n + q_{n-1}x},$$

eine rationale Funktion mit einer Polstelle im Negativen und der Asymptoten $y = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Es ist stets $f_n(0) = \frac{p_n}{q_n}$. Man muss die beiden Fälle unterscheiden, dass n gerade bzw. ungerade ist. Im ersten Fall kommt der Graph streng wachsend aus dem Negativen, kreuzt die y-Achse bei $\frac{p_n}{q_n}$ und schmiegt sich von unten an die Asymptote an, so dass man sofort $f_n(0) = \frac{p_n}{q_n} < f_n(x) <$

[4] Zwei Brüche $\frac{p_j}{q_j}, j = 1, 2$ heißen **Farey-benachbart**, wenn $|\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1}| = \frac{1}{q_1 q_2}$. Dies hat zur Konsequenz, dass es zwischen diesen beiden Brüchen keinen Bruch gibt, der einen Nenner $\leq q_1 + q_2$ hat.

$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} =: f_n(\infty)$ für alle $x > 0$ erkennt. Da $\omega = f_n(1/(a_{n+1} + \varepsilon_{n+1})$ mit $\varepsilon_{n+1} = [a_{n+2}, ...]$ und $f_n(1/a_{n+1}) = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, erkennt man

$$\frac{p_n}{q_n} < \omega < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$$

und dass $\frac{p_n}{q_n}$ eine umso bessere Näherung für ω ist, je größer a_{n+1} ausfällt.
Wenn n ungerade, fällt der Graph von f_n aus dem positiven Unendlichen, kreuzt die y-Achse bei $\frac{p_n}{q_n}$ und schmiegt sich von oben an die Asymptote an. Alles andere verläuft analog zum Fall, dass n gerade ist.

Beispiel: Man kann berechnen, dass $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, ...]$. Damit gilt

$$\frac{p_1}{q_1} = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7},$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106},$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113}.$$

Jetzt folgt aus Satz 9, dass

$$\frac{333}{106} = 3,14150943... < \pi < \frac{355}{113} = 3,14159292...$$

und wegen $a_4 = 292$

$$\left|\pi - \frac{355}{113}\right| < \frac{1}{292q_3^2} = 0,00000027,$$

d.h., dass $\pi \approx \frac{355}{113} = 3,14159292...$ auf mindestens 6 Nachkommastellen genau ist.

Es kann jetzt auch sehr leicht eingesehen werden, dass die Konvergenten $\frac{p_n}{q_n}$ zu geraden n eine monoton wachsende und die Konvergenten $\frac{p_n}{q_n}$ zu ungeraden n eine monoton fallende Folge liefern, so dass die Einschließung in Satz 9 immer besser wird.
Dass ein unendlicher Kettenbruch eine irrationale Zahl darstellt (das war eines der theoretischen Ziele), folgt jetzt sofort: Wenn nicht, müsste es eine Einschließung der Form

$$\frac{p_n}{q_n} < \omega = \frac{p}{q} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

mit $q < q_n < q_{n+1}$ (die Nenner der Konvergenten eines unendlichen Kettenbruchs werden wegen der Rekursionseinenschaften beliebig groß) und $|p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}| = 1$ geben. Das ist wegen der oben erwähnten *Farey-Nachbarschaft* der beiden Konvergenten $\frac{p_n}{q_n}$ und $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ unmöglich!

4.3 Periodische Kettenbrüche und quadratische Irrationalitäten

Ziel ist der folgende

Satz 10. *Ein periodischer Kettenbruch stellt eine quadratische Irrationalität dar.*

Belege für diesen Satz sind $\Phi = [1; \overline{1}]$ und $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$. Dass auch jede quadratische Irrationalität durch einen periodischen Kettenbruch dargestellt wird, soll hier nicht gezeigt werden.
Weitere Belege für diesen Satz enthalten Übungsaufgaben.

Beweis: Wir schauen uns einen speziellen periodischen Kettenbruch, nämlich $\omega := [\overline{a_1, a_2, ..., a_p}]$ an (Beachte: Hier ist $a_0 = 0$). Sehr hilfreich ist die unimodulare Funktion f_n. Denn es gilt ja wegen der Periodizität

$$\omega = f_n(\omega).$$

Diese Gleichung kann ganz einfach als quadratische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten geschrieben werden! Dabei führt die Vorzeichenbedingung $|V_{f_n}| = 1$ auf die Eigenschaft, dass unter der Wurzel der Lösung der quadratischen Gleichung keine Quadratzahl steht, ω also wirklich irrational ist.

Jetzt sei der periodische Kettenbruch von ω etwas komplizierter:

$$\omega = [a_1, a_2, ..., a_n, \overline{a_{n+1}, ..., a_{n+p}}].$$

Setze $\tilde{\omega} := [\overline{a_{n+1}, ..., a_{n+p}}]$. Dieses ist wegen des ersten Teils eine quadratische Irrationalität. Nun folgt

$$\omega = f_n(\tilde{\omega}).$$

Eine unimodulare Funktion wie f_n bildet quadratische Irrationalitäten wieder auf solche ab. Also ist ω eine solche. Näheres in Übungsaufgaben. ∎

bemerkung: Schwieriger zu beweisen ist die Umkehrung: Jede quadratische Irrationalität beseitzt eine periodische Kettenbruchdarstellung!

5 Berechnung der Koeffizienten eines Kettenbruchs (Euklidischer Algorithmus)

Es geht um einen Algorithmus, zu einer vorgegebenen Zahl $\omega > 0$ die Koeffizienten $a_j, j = 1, 2, ...$ des zugehörigen Kettenbruchs zu berechnen. Als Nebenprodukt ergibt sich, dass eine rationale Zahl stets durch einen endlichen Kettenbruch und eine irrationale Zahl stets durch einen unendlichen Kettenbruch dargestellt werden kann.
Dabei spielt die „Floor-Funktion“ (Gaussklammer) eine gewisse Rolle:

Definition 11. *Für $a > 0$ bezeichnet $\lfloor a \rfloor$ die größte natürliche Zahl n_0 mit $n_0 \leq a$.*

Z.B. ist $\lfloor 3,14 \rfloor = 3$. Allgemein gilt für den „nullten“ Kettenbruchkoeffizienten $a_0 = \lfloor \omega \rfloor$, so dass wir im Folgenden $a_0 = 0$, also $0 < \omega < 1$ annehmen können.
Für das Folgende ist es hilfreich zu wissen, dass $\lfloor a \rfloor$ die größte Anzahl von Quadraten der Kantenlänge 1 ist, die in ein Rechteck mit den Kantenlängen 1 und $a > 0$ hineinpassen.
Sei jetzt $0 < \omega < 1$. Wie bestimmt man a_1? Dies ist die größte natürliche Zahl für die $\omega \le \frac{1}{a_1}$, bzw. $a_1 \le \frac{1}{\omega}$. Also gilt $a_1 = \lfloor \frac{1}{\omega} \rfloor$.
Wie berechnet man den nächsten Kettenbruchkoeffizienten? Wenn $a_1 = \frac{1}{\omega}$, gilt $\omega = \frac{1}{a_1} = [a_1]$. Fertig.
Sei also $a_1 < \frac{1}{\omega}$, d.h. es gebe ein ε_1 mit $0 < \varepsilon_1 < 1$ und $\omega = \frac{1}{a_1+\varepsilon_1}$. Dabei berechnet sich $\varepsilon_1 = \frac{1}{\omega} - a_1 = \frac{1}{\omega} - \lfloor \frac{1}{\omega} \rfloor$. Dann ist a_2 der erste Kettenbruchkoeffizient von ε_1, also nach der Formel eben $a_2 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon_1} \rfloor$. So fährt man fort: Setze $\varepsilon_2 := \frac{1}{\varepsilon_1} - a_2$. Wenn $\varepsilon_2 = 0$, ist man am Ziel, es gilt $\omega = [a_1, a_2]$. Sonst setze $a_3 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon_2} \rfloor$. U.s.w.
Der n-te Schritt lautet: Setze $a_n := \lfloor \frac{1}{\varepsilon_{n-1}} \rfloor$ und $\varepsilon_n := \frac{1}{\varepsilon_{n-1}} - a_n$. Wenn $\varepsilon_n = 0$, ist man am Ziel, es gilt $\omega = [a_1, a_2, ..., a_n]$. Sonst gehe zum $(n+1)$-ten Schritt.

Einfache Merkform des Algorithmus (wenn $0 < \omega < 1$): Invertiere ($y := \frac{1}{\omega}$), setze a_1 als ganzzahligen Anteil von y (die Zahl vor dem Komma von y: $a_1 = \lfloor y \rfloor$), nehme den nicht ganzzahligen Anteil von y ($\varepsilon := y - \lfloor y \rfloor$) und mache mit ε dasselbe wie vorher mit ω. Kurz: Invertieren, vor dem Punkt (Komma) merken, abziehen, invertieren,.......

Die kurze rekursive Form des Algorithmus lautet
Start: $y_1 := \frac{1}{\omega}, a_1 := \lfloor y_1 \rfloor$.

$$y_{k+1} = \frac{1}{y_k - a_k}, \quad a_{k+1} := \lfloor y_{k+1} \rfloor$$

Abgebrochen werden muss, wenn erstmals $y_k = a_k$.

Dieser Algorithmus heißt **Euklidischer Algorithmus**, da der klassische Euklidische Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen fast mit diesem Kettenbruchalgorithmus für $\omega = \frac{p}{q}$ übereinstimmt. In der Tat hat Euklid (ca. 360 -300 v.Chr.) im Buch X seiner Elemente einen Algorithmus der *wechselseitigen Wegnahme* (s. Kap. 5.1) eingeführt, mit dessen Hilfe man auch die Inkommensurabilität von zwei Strecken nachweisen kann und der i.W. dem Kettenbruchalgorithmus entspricht.

5.1 Geometrische Veranschaulichung

Wir betrachten ein Rechteck R_1 der Längen $x_1 := \omega < 1$ und $x_0 := 1$. Dann ist der erste Kettenbruchkoeffizient $a_1 (= \lfloor \frac{1}{\omega} \rfloor)$ die Anzahl der Quadrate mit Kantenlänge ω, die in das Rechteck R_1 hineinpassen. Was nachbleibt, ist ein Rechteck R_2 mit den Längen $x_2 := 1 - a_1\omega$ und ω. Dann ist a_2 die Anzahl der Quadrate der Länge x_2, die in dieses Rechteck R_2 passen. Nun setze $x_3 := x_1 - a_2 x_2$, usw. Diesen Algorithmus nenne ich **Rechteckalgorithmus**. Er liefert die Koeffizienten des Kettenbruchs.

Das Verhältnis der längeren zur kürzeren Seite des Rechtecks R_k im k-ten Schritt ist gerade obiges y_k.
Schon jetzt sieht man aber ein, dass dieser Algorithmus genau dann nach endlich vielen Schritten abbricht, wenn ω rational, also ein Bruch $\frac{p}{q}$ ist. Wenn nämlich $\omega = \frac{p}{q}$, denke man sich das Ausgangsrechteck R_1 so auf kariertem Papier aufgetragen, dass $x_0 = 1$ genau q Längeneinheiten (Quadraten) entspricht. Dann entspricht die Länge ω gerade p Längeneinheiten, das Ausgangsrechteck ist q LE lang und p LE breit. Jedes Rechteck und jedes Quadrat in den Zwischenschritten des Rechteckalgorithmus hat eine ganzzahlige Kantenlänge x_k. Da das kleinstmögliche Quadrat eines mit Kantenlänge 1 ist, muss der Algorithmus nach n Schritten abbrechen — übrigens mit $a_n \geq 2$.
Umgekehrt, wenn der Algorithmus nach n Schritten abbricht, nehme man als Längeneinheit die Kantenlänge der letzten $a_n(\geq 2)$ Quadrate. Dann sind alle Kantenlängen der vorangehenden Rechtecke und Quadrate Vielfache dieser Längeneinheit, also auch die des Ausgangsrechtecks R_1. Daher muss ω rational sein.

Beispiel: $\omega = 0,886$.

1. $y_1 = \frac{1}{\omega} = 1,1287$, also $a_1 = \lfloor y_1 \rfloor = 1$. Dann $\varepsilon_2 := y_1 - a_1 = 0,1287$.
2. $y_2 = \frac{1}{\varepsilon_2} = 7,7719$, also $a_2 = \lfloor y_2 \rfloor = 7$. Dann $\varepsilon_3 := y_2 - a_2 = 0,7719$.
3. $y_3 = \frac{1}{\varepsilon_3} = 1,2955$, also $a_3 = \lfloor y_3 \rfloor = 1$. Dann $\varepsilon_4 := y_3 - a_3 = 0,2955$.
4. $y_4 = \frac{1}{\varepsilon_4} = 3,3846$, also $a_4 = \lfloor y \rfloor = 3$. Dann $\varepsilon_5 := y_4 - a_4 = 0,3846$.
5. $y_5 = \frac{1}{\varepsilon_5} = 2,6000$, also $a_5 = \lfloor y \rfloor = 2$. Dann $\varepsilon_6 := y_5 - a_5 = 0,6000$.
6. $y_6 = \frac{1}{\varepsilon_6} = 1,6667$, also $a_6 = \lfloor y \rfloor = 1$. Dann $\varepsilon_7 := y_6 - a_6 = 0,6667$.
7. $y_7 = \frac{1}{\varepsilon_7} = 1,5000$, also $a_7 = \lfloor y \rfloor = 1$. Dann $\varepsilon_8 := y_7 - a_7 = 0,5$.
8. $y_8 = \frac{1}{\varepsilon_8} = 2,0000$, also $a_8 = \lfloor y \rfloor = 2$. Dann $\varepsilon_9 := y_8 - a_8 = 0$.

Überzeugen Sie sich, dass

$$0,886 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}}$$

Dass $\omega := 0,54260089686098654708$ durch einen Bruch mit relativ kleinem Nenner angenähert werden kann, erkennt man erst an dem Kettenbruch von ω.
$\omega = [1, 1, 5, 2, 1, 2, 2, ...]$. Die 7. Konvergente ist $\frac{121}{223} = 0,54260089686098654708520179372 2$. Sie stimmt auf fast alle Stellen. Der 8. Koeffizient ist riesengroß ($a_8 = 3865780114427090$).

Führt man den Euklidischen Algorithmus für $x := \sqrt{2}$ analytisch durch, so erkennt man sofort $a_0 = 1$. Dann ist $\omega := \sqrt{2} - 1$ und $y_1 := 1/\omega = \sqrt{2} + 1$, also $a_1 = 2$. Dann ist $y_2 := 1/(\sqrt{2} - 1) = y_1$, so dass $\sqrt{2} = 1; \overline{2}]$ folgt. Vergleichen Sie, wie vergleichsweise mühsam der unendliche Dezimalbruch von $\sqrt{2}$ ausgerechnet werden muss!

Wir fassen die bisherigen Überlegungen zusammen und stellen fest, dass ein wesentliches Ziel dieser Vorlesung erreicht wurde:

Satz 12. *Jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$ mit $1 \leq p < q$ ist durch einen endlichen Kettenbruch $[a_1, ..., a_n]$ der Ordnung n mit $a_n \geq 2$ eindeutig darstellbar. Jeder endliche Kettenbruch stellt eine rationale Zahl dar.*
Irrationale Zahlen haben eine eindeutige Darstellung durch unendliche Kettenbüche.
Unendliche Kettenbrüche stellen irrationale Zahlen dar.

Beachten Sie, dass der Satz 12 nichts über die Ordnung des Kettenbruchs aussagt, der nur bedingt etwas mit der Größe des Nenners q zu tun hat. Aber natürlich ist die Ordnung niemals größer als q.

Beispiele:

1. $$\frac{17}{50} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16}}}$$

   Die Ordnung ist 3, es ist $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 16$

2. $$\frac{8}{13} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

   Die Ordnung ist 5, es ist $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1, a_5 = 2$.

5.2 Eine weitere geometrische Deutung eines Kettenbruchs

Man nehme kariertes Papier und zeichne die Gerade $y = \omega x$ in ein Koordinatensystem, dessen Ursprung in einem „Gitterpunkt“ liegt. Ist ω irrational, so wird sie niemals einen weiteren Gitterpunkt treffen. Man kann auch sagen, dass kein „rationaler Punkt “ auf dieser Geraden liegt. Nun denke man sich die Konvergenten als Punkte $P_n := (q_n, p_n)$ eingezeichnet. Sie liegen abwechselnd unter und über der Geraden, und zwar für gerade n oberhalb, für ungerade n unterhalb. Nun gilt ja wegen der Rekursion (Satz 8)

$$P_{n+1} = a_{n+1} P_n + P_{n-1}.$$

a_{n+1} ist die größte natürliche Zahl, für die P_{n+1} auf der anderen Seite der Geraden liegt als P_n.

6 Präsenzaufgaben mit Lösungen

Aufgabe P1:
Welchen Bruch stellt der periodische Dezimalbruch

$$x := 0,55\overline{142857}$$

dar?
Lösung: Es ist $x = 0,55 + 0,01 \cdot y$ *mit* $y := 0,\overline{142857}$*, welches der Gleichung* $10^6 y = 142857 + y$ *genügt. Also gilt* $y = \frac{142857}{999999} = \frac{15873}{111111} = \frac{1}{7}$*. Hieraus folgt* $x = 0,55 + 0,01 \cdot y = \frac{55}{100} + \frac{1}{7} = \frac{193}{350}$.

Aufgabe P2:
Berechnen Sie

$$\omega_1 := [\overline{3}], \quad \omega_2 := [\overline{4}], \quad \omega_3 := [1, \overline{3}].$$

Hinweis: Bei diesen Kettenbrüchen ist der führende Koeffizient $a_0 = 0$. Man hätte auch $\omega_1 := [0; \overline{3}]$ schreiben können.
Lösung: Aus $\omega_1 = \frac{1}{3+\omega_1}$ *folgt* $\omega_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{13} - 3)$.
Aus $\omega_2 = \frac{1}{4+\omega_2}$ *folgt* $\omega_2 = \sqrt{5} - 2$.
Aus $\omega_3 = \frac{1}{1+\omega_1}$ *folgt* $\omega_3 = \frac{1}{6}(\sqrt{13} + 1)$.

Aufgabe P3:
Berechnen Sie mit Hilfe des klassischen Euklidischen Algorithmus $ggT(5287, 3689)$ und vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem Kettenbruch von $\omega := \frac{3689}{5287}$.
Hinweis: Der klassische Euklidische Algorithmus zur Berechnung z.B. von $ggT(33, 27)$ sieht so aus:

$$33 = \mathbf{1} \cdot 27 + 6,$$

$$27 = \mathbf{4} \cdot 6 + 3,$$

$$6 = \mathbf{2} \cdot 3 + 0.$$

Der letzte Rest 3 ist der ggT. Aus Gründen, die Sie selbst herausfinden sollen, wurden die *Multiplikatoren fett gedruckt.*
Lösung:

$$5287 = \mathbf{1} \cdot 3689 + 1598,$$
$$3689 = \mathbf{2} \cdot 1598 + 493,$$
$$1598 = \mathbf{3} \cdot 493 + 119,$$
$$493 = \mathbf{4} \cdot 119 + 17,$$
$$119 = \mathbf{7} \cdot 17.$$

Also ist $ggT(5287, 3689) = 17$*, der letzte nichtverschwindente Rest. Fettgedruckt sind die Koeffizienten des Kettenbruchs, so dass* $\omega := \frac{3689}{5287} = [1, 2, 3, 4, 7]$*. Dieser Bruch kann natürlich durch 17 gekürzt werden:* $\omega = \frac{217}{311}$.

Aufgabe P4:
Sei $x := [\overline{n}]$ ein einfacher periodischer Kettenbruch mit einer natürlichen Zahl n. Leiten Sie eine quadratische Gleichung her, die von x gelöst wird, und zeigen Sie auf diese Weise, dass x eine quadratische Irrationalität ist.
Lösung: Mit der üblichen „Schwanzmethode" erhält man $x = \frac{1}{n+x}$ *und daher die quadratische Gleichung* $x^2 + nx - 1$ *mit der positiven Lösung* $x = -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{n^2+4}$*, die – weil* $n^2 + 4$ *keine Quadratzahl ist – eine quadratische Irrationalität ist.*

Aufgabe P5:
Stellen Sie $\sqrt{5}$ als periodischen Kettenbruch dar, indem Sie den Euklidischen Algorithmus analytisch durchführen.
Lösung: Da $2 < \sqrt{5} < 3$*, gilt* $a_0 = 2$*. Setze* $\varepsilon_0 := \sqrt{5} - 2$*. Dann ist* $\frac{1}{\varepsilon_0} = 2 + \sqrt{5}$*. Dessen ganzzahliger Anteil ist* $a_1 = 4$*. Der nichtganzzahlige Anteil ist wieder* $\varepsilon_1 := \sqrt{5} - 2$*. Daher gilt* $\sqrt{5} = [2; \overline{4}]$.

Aufgabe P6:
Welche Zahl stellt der periodische Kettenbruch $x := [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$ dar?
Lösung: Für $\omega := [\overline{1, 1, 1, 4}]$ *folgt* $\omega = f_4(\omega)$*. Es muss* $f_4(x) = \frac{p_4+p_3x}{q_4+q_3x}$ *mit Hilfe der Rekursion berechnet werden:*

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1},\ q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}, n = 1, 2, ...,$$

mit $p_0 := a_0, q_0 := 1, p_1 := a_0a_1 + 1, q_1 := a_1$*. Es folgt* $p_0 = 0, p_1 = 1, p_2 = 1, p_3 = 2, p_4 = 4p_3 + p_2 = 9, q_0 = 1, q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3, q_4 = 4q_3 + q_2 = 14$ *(folgt aus* $\omega := [\overline{1, 1, 1, 4}]$*, da* $a_0 = 0, a_1 = a_2 = a_3 = 1, a_4 = 4$*), also*

$$\omega = \frac{9 + 2\omega}{14 + 3\omega},$$

woraus die quadratische Gleichung $\omega^2 + 4\omega - 3 = 0$ *und* $\omega = \sqrt{7} - 2$ *sowie* $x = \sqrt{7}$ *folgt.*
Alternative: Man kann direkt den Vierfach-Bruch $f_4(x) = \frac{9+2x}{14+3x}$ *mit Bruchrechnungstechniken berechnen.*

7 Übungsaufgaben mit Lösungen

Aufgabe Ü1:
Sei $\omega := \frac{p}{q}$ ein Bruch mit teilerfremden natürlichen Zahlen p und q. Zeigen Sie:
a) ω hat genau dann eine endliche Dezimalbruchdarstellung, wenn 2 und 5 die einzigen Primfaktoren von q sind.
Lösung: Wenn 2 und 5 die einzigen Primfaktoren von q sind, kann man den Bruch so erweitern, dass eine Zehnerpotenz im Nenner steht.
Ein endlicher Dezimalbruch besitzt eine Darstellung durch einen Bruch mit einer Zehnerpotenz im Nenner. Wenn man diesen Bruch kürzt, kommen nur Primfaktoren 2 und 5 des Nenners in Frage.
b) Gibt es einen Primfaktor f von q verschieden von 2 und 5, so wird ω durch einen unendlichen, periodischen Dezimalbruch dargestellt.
Lösung: Wenn man die Dezimalbruchdarstellung von ω berechnet, so erhält man eine Folge von Resten, die bei der Divsion durch q auftreten. Diese werden mit einer Zehnerpotenz 10^n multipliziert, so dass gerade $10^n \cdot r > q$, und dann wieder durch q dividiert. Da es nur q mögliche Reste gibt, muss sich die Restefolge irgendwann periodisch wiederholen. Wenn der Algorithmus abbricht (Rest Null), hat $\frac{p}{q}$ eine Darstellung durch einen endlichen Dezimalbruch. Das kann nicht sein (Teil a).

Aufgabe Ü2:
Berechnen Sie den (periodischen) Kettenbruch von $\omega := \sqrt{3}$ mit Hilfe des Euklidischen Kettenbruchalgorithmus analytisch, indem Sie alle „Reste“ analytisch berechnen.
Lösung:

1. *Wegen $1 < \sqrt{3} < 2$ gilt $a_0 := 1$. Setze $y_0 := \omega - 1$. $y_1 := \frac{1}{y_0} = (\sqrt{3}+1)/2$, also $a_1 = \lfloor y_1 \rfloor = 1$.*
2. *$\varepsilon_2 := y_1 - a_1 = (\sqrt{3}-1)/2$ und $y_2 := \frac{1}{\varepsilon_2} = \sqrt{3}+1$, also $a_2 = \lfloor y_2 \rfloor = 2$.*
3. *$\varepsilon_3 := y_2 - a_2 = \sqrt{3} - 1 = \omega$ Der erste Schritt wird also wiederholt*

Daher gilt

$$\omega = [1; \overline{1, 2}]$$

Aufgabe Ü3: Ein Jahr hat $J := 365,2425$ Tage und ein synodischer Mondumlauf zählt $M := 29,53059$ Tage. Die Griechen haben so gerechnet, dass 235 Monate gerade 19 Jahre ergeben. Offensichtlich ist $\frac{19}{235}$ eine sehr gute Näherung für $\omega := \frac{M}{J}$. Begründen Sie dies mit Hilfe des Kettenbruchs von $\frac{M}{J}$. Um welche Konvergente handelt es sich? Geben Sie den nächsten Koeffizienten an und schätzen Sie den Fehler ab.
Zusatzfrage: Warum fällt Ostern alle 19 Jahre „fast“ auf dasselbe Datum?

Lösung: $\frac{29{,}53059}{365{,}2425} = [12, 2, 1, 2, 1, 1, 18, ...]$. *Die 6. Konvergente ist* $\frac{19}{235}$. *Es ist* $a_7 = 18$ *und nach dem Einschließungssatz (Die Länge des nten Einschließungsitervalls ist* $\leq \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$*; hier ist* $n = 6$.*) gilt* $|\frac{19}{235} - \frac{M}{J}| \leq \frac{1}{18 \cdot 235^2} = 0{,}000001005985614$.
Ostern ist der Sonntag nach dem ersten Vollmond nach der Tag- und Nachtgleiche am 20./21. März.

Aufgabe Ü4:
a) Zwei Brüche $\frac{p_j}{q_j}, j = 1, 2$ heißen **Farey-benachbart**[5], wenn $|\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1}| = \frac{1}{q_1 q_2}$. Zeigen Sie: Seien $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ zwei Farey-benachbarte Brüche. Dann hat jeder Bruch zwischen diesen beiden Brüchen einen Nenner $\geq q_1 + q_2$.
Lösung: Sei ohne Einschränkung $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p}{q} < \frac{p_2}{q_2}$. *Dann gilt wegen der Farey-Nachbarschaft*

$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = 1. \tag{7}$$

Ferner folgt aus $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p}{q}$, *dass*

$$p q_1 - p_1 q \geq 1 \tag{8}$$

und aus $\frac{p}{q} < \frac{p_2}{q_2}$, *dass*

$$p_2 q - p q_2 \geq 1. \tag{9}$$

Wenn wir die Ungleichung (8) mit q_2 *und die Ungleichung (9) mit* q_1 *multiplizieren und diese dann entstehenden beiden Ungleichungen*

$$p q_1 q_2 - p_1 q q_2 \geq q_2, \quad p_2 q q_1 - p q_1 q_2 \geq q_1 \tag{10}$$

addieren, hebt sich der Term $p q_1 q_2$ *weg, und es bleibt*

$$q(p_2 q_1 - p_1 q_2) \geq q_1 + q_2.$$

Aus (7) folgt jetzt die Behauptung.

b) Begründen Sie, warum eine rationale Zahl stets durch einen endlichen Kettenbruch dargestellt wird und dass ein unendlicher Kettenbruch stets eine irrationale Zahl darstellt.
Lösung: Beide Aussagen sind logisch gleichwertig! („Wenn rational, dann endlich“, ist logisch äquivalent zu „Wenn unendlich, dann irrational“).
Das entscheidende Argument beruht auf der Farey-Nachbarschaft zweier aufeinanderfolgender Konvergenten, zwischen denen kein Bruch mit kleinerem Nenner als die der beiden Konvergenten liegen kann. Denn wegen der Rekursion für die Konvergentennenner werden diese für unendliche Kettenbrüche beliebig groß, so dass eine rationale Zahl mit Nenner q nicht mehr von solchen Konvergenten eingeschlossen werden kann, wenn deren Nenner größer als q sind.

Aufgabe Ü5:
Eine quadratische Irrationalität ist eine Zahl der Form $r + s\sqrt{n}$ mit rationalen Zahlen r und $s \neq 0$ und einer natürlichen Zahl n, die keine Quadratzahl ist.

[5] Zwei aufeinanderfolgende Konvergenten einer reellen Zahl haben diese Eigenschaft.

a) Zeigen Sie: Eine unimodulare Funktion $f : x \mapsto \frac{a+bx}{c+dx}$ bildet quadratische Irrationalitäten wieder in quadratische Irrationalitäten ab.
Lösung: Leicht einzusehen, wenn man den Nenner $c+d(r+s\sqrt{n})$ *durch Erweiterung des Bruches* $f(r+s\sqrt{n})$ *mit* $c+dr-ds\sqrt{n}$ *wurzelfrei macht. Die entstehende quadratische Irrationalität hat sogar dieselbe Zahl* n *unter der Wurzel. Der Koeffizient von* $\sqrt{n}$ *berechnet sich zu* $V_f s \neq 0$*! Ihr „Typ" hat sich nicht geändert.*

b) Zeigen Sie, dass jeder periodische Kettenbruch $\omega := [a_0; a_1, ..., a_n, \overline{a_{n+1}, ..., a_{n+p}}]$ ein quadratische Irrationalität ist. Dabei sollen und dürfen sie benutzen (Vorlesung), dass dies für $n = 0$ zutrifft.
Lösung: OE sei $a_0 = 0$*. Setze* $x := [\overline{a_{n+1}, ..., a_{n+p}}]$ *und* f_n *die zu* ω *gehörende unimodulare Funktion. Dann gilt* $\omega = f_n(x)$*. Wir wissen, dass* x *eine quadratische Irrationalität ist. Vom Teil a) wissen wir, dass auch* $f_n(x)$ *eine solche ist.*

8 Literatur

O. PERRON: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Teubner (1956)
A. KHINTCHINE: Kettenbrüche, Teubner (1958)
A. BEUTELSPACHER, B. PETRI: **Der Goldene Schnitt**, BI, 1989