

# Aufgaben Fibonacci-Zahlen, goldener Schnitt, ....

16. Juni 2006

Blatt 7

B. Werner SoSe 06

## Präsenzaufgaben:

### Aufgabe P19:

Sei  $\omega := \sqrt{2} - 1 = 0.41421356..$  (siehe Ü21). Finden Sie alle besten Approximierenden erster und zweiter Art bis zu dem Nenner  $Q := 5$ . Finden Sie eine beste Approximierende erster Art, die nicht beste Approximierende 2.Art ist.

**Lösung:** Heiße Kandidaten sind linke und rechte Nachbarn des Nenneralgorithmus. Diese liefern die folgenden Brüche:  $\frac{1}{2}$  (Konvergente, linker Nachbar),  $\frac{1}{3}$  (rechter Nachbar),  $\frac{2}{5}$  (rechter Nachbar und Konvergente). Die Konvergenten sind beste Approximationen erster und zweiter Art, wie man sich überzeugt, wenn man die Fareyfolge  $F_5$  betrachtet:

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{1}{1}.$$

Bei  $\frac{1}{2}$  gibt es nur die Konkurrenten aus  $F_2$ , nämlich  $\frac{0}{1} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1}$ , bei  $\frac{2}{5}$  ist der Fehler 2.Art  $5\omega - 2 = 0.07106....$  Nach Konstruktion des Nenneralgorithmus und nach Satz 3.2 ist  $\frac{2}{5}$  beste Approximation erster und zweiter Art.  $\frac{1}{3}$  hat  $|\frac{1}{3} - \omega| = 0.080880..$  als Fehler 1.Art. Hiermit konkurriert  $|\frac{1}{2} - \omega| = 0.085786....$  Damit ist  $\frac{1}{3}$  beste Approximierende erster, aber nicht zweiter Art, da sein Fehler 2.Art  $|3\omega - 1| = 0.2426... größer ist als der von  $\frac{1}{2}$ : Er beträgt  $|2\omega - 1| = 0.1715....$$

Somit haben wir ein weiteres Beispiel für eine beste Approximierende erster Art, die nicht beste Approximierende zweiter Art ist.

### Aufgabe P20:

Berechnen Sie die Farey-„Folge“ (besser angeordnete Farey-Menge)  $F_7$  (alle der Größe nach geordneten Brüche aus  $[0, 1]$  mit Höchstnenner  $n$ ). Überlegen Sie vorher, wieviele Brüche  $F_7$  enthält!

**Lösung:** Im Skript findet sich

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{1}{1}. \quad (1)$$

Diese aus 11 Brüchen bestehende Folge muss nur um die Brüche mit Nenner 6 (davon gibt es nur  $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$  und Nenner 7 (von denen gibt es sechs) ergänzt werden:

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{7} < \frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{5}{7} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \frac{6}{7} < \frac{1}{1}. \quad (2)$$

## Übungsaufgaben: (Abgabe 27. Juni 2006)

### Aufgabe Ü22

Sei  $\omega = 0.3396$  (siehe Ü19 – die Lösung ist im Internet zu finden). Bestimmen Sie alle besten Approximierenden 1. und 2. Art bis zu einem Nenner 8. Dabei dürfen Sie Ihre (oder meine) Ergebnisse aus Ü19 nutzen und auch verwenden, dass nur solche Brüche in Frage kommen, die in Gestalt von  $\frac{p_\ell}{\ell}$  zu linken und in Gestalt von  $\frac{p_r}{r}$  zu rechten Nachbarn von  $x_0 := 0$  gehören. Finden Sie einen Bruch, der zwar beste Approximation erster, aber nicht zweiter Art ist (dieser kann einen größeren Nenner als 8 besitzen).

**Lösung:** Wir haben die linken Nachbarn  $x_2$  und  $x_5, x_8$  und den rechten Nachbarn  $x_3$  mit den Brüchen  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$  und  $\frac{3}{8}$ . Die ersten beiden Brüche sind Konvergenten und beste Approximationen erster und zweiter Art – wie man sich sehr leicht überzeugt, indem man ihre Konkurrenten  $\frac{0}{1}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$  betrachtet. Der Fehler 2. Art von  $\frac{1}{3}$  ist  $3\omega - 1 = 0.0188$ , während der erster Art  $|\omega - \frac{1}{3}| = 0.0062667$  ist. Hieran reicht weder  $\frac{2}{5}$  noch  $\frac{3}{8}$  heran, welcher einen Fehler erster Art von  $|\omega - \frac{3}{8}| = 0.0354..$  besitzt. Daher sind die beiden Konvergenten  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$  die einzigen besten Approximationen sowohl erster als auch zweiter Art bis zum Nenner  $\leq 8!$

Wenn wir uns auf die Suche nach einem Bruch machen, der beste Approximation erster, aber nicht zweiter Art ist, müssen wir weiterrechnen: Es folgen ja im Dreiertakt die linken Nachbarn mit  $\ell = 11, 14, \dots, 53$  und Umlaufzahlen  $p_\ell = 4, 5, \dots, 18$ . Der erste linke Nachbar, der beste Approximation erster, aber nicht zweiter Art ist, ist der Bruch  $\frac{10}{29}$  – es ist  $|\omega - \frac{10}{29}| = 0.00523 < |\omega - \frac{1}{3}| = 0.0062667$ . Alle nachfolgenden Brüche zu den linken Nachbarn sind sämtlich beste Approximationen erster, aber nicht zweiter Art – bis zu  $\frac{17}{50}$  (die Konvergente ist  $\frac{18}{53}$ ). Es ist  $|\omega - \frac{17}{50}| = 0.0004 < |\omega - \frac{1}{3}| = 0.0062667$ , aber nicht zweiter Art, da  $|50\omega - 17| = 0.02 > |3\omega - 1| = 0.0188$ .

### Aufgabe Ü23

Sei  $p$  eine Primzahl. Natürlich muss die Fareyfolge  $F_p$  alle Brüche  $\frac{j}{p}, j = 1, 2, \dots, p-1$  enthalten. Da  $p$  Primzahl ist, können sie nicht gekürzt werden und daher nicht zu  $F_{p-1}$  gehören.

- Welche Farey-Nachbarn haben sie für  $p = 13$ , d.h. es sind von den 12 Brüchen  $\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \dots, \frac{12}{13}$  alle Farey-Nachbarn aus  $F_{13}$  gefragt.

**Lösung:** Zur Erinnerung: Zwei Brüche  $\frac{p_1}{q_1}$  und  $\frac{p_2}{q_2}$  heißen **Farey-benachbart**, wenn

$$\left| \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} \right| = \frac{1}{q_1 q_2}.$$

Durch geschicktes Ausprobieren erhält man:

$\frac{1}{13}$  hat die Nachbarn  $\frac{1}{12}$  und  $\frac{0}{1}$ .

$\frac{2}{13}$  hat die Nachbarn  $\frac{1}{6}$  und  $\frac{1}{7}$ .

$\frac{3}{13}$  hat die Nachbarn  $\frac{1}{4}$  und  $\frac{2}{9}$ .

$\frac{4}{13}$  hat die Nachbarn  $\frac{1}{3}$  und  $\frac{3}{10}$ .

$\frac{5}{13}$  hat die Nachbarn  $\frac{2}{5}$  und  $\frac{3}{8}$ .  
 $\frac{6}{13}$  hat die Nachbarn  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{5}{11}$ .  
 $\frac{7}{13}$  hat die Nachbarn  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{6}{11}$ .  
 $\frac{8}{13}$  hat die Nachbarn  $\frac{3}{5}$  und  $\frac{5}{8}$ .  
 $\frac{9}{13}$  hat die Nachbarn  $\frac{7}{10}$  und  $\frac{2}{3}$ .  
 $\frac{10}{13}$  hat die Nachbarn  $\frac{7}{9}$  und  $\frac{3}{4}$ .  
 $\frac{11}{13}$  hat die Nachbarn  $\frac{5}{6}$  und  $\frac{6}{7}$ .  
 $\frac{12}{13}$  hat die Nachbarn  $\frac{11}{12}$  und  $\frac{1}{1}$ .

- Sei  $\omega = \frac{7}{13}$ . Wenn Sie den Nenneralgorithmus mit diesem Winkel durchführen, so können Sie die ersten beiden Konvergenten und die zugehörigen Koeffizienten berechnen. Tun Sie dies. Was fällt Ihnen im Hinblick auf Ihr eben gewonnenes Resultat auf?

**Lösung:** Klar, dass der Schritt von  $x_1$  nach  $x_2 = \frac{1}{13}$  ein Wechselschritt ist. Daher ist  $a_1 = 1$  und  $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}$  die erste Konvergente. Der nächste Schritt ( $x_3 = \frac{8}{13}$  ist linker Nachbar) ist wieder ein Wechselschritt. Daher ist  $a_2 = 1$  und  $\frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{2}$  die zweite Konvergente. Es folgen die vier linken Nachbarn  $x_5, x_7, x_9 = \frac{11}{13}, x_{11} = \frac{12}{13}$ , bevor  $x_{13} = 0$ . Daher ist  $a_3 = 5$  und  $\frac{p_3}{q_3} = \frac{6}{11}$ .

Die letzten beiden Konvergenten  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{6}{11}$  sind die gesuchten Nachbarn. Wenn man die vorletzte kennt, kann man die letzte sofort berechnen.

## Aufgabe Ü24

Im Folgenden nenne ich einen Bruch  $\frac{p}{q}$  **gekürzt**, wenn  $\text{ggT}(p, q) = 1$ , wenn also Zähler und Nenner teilerfremd sind.

- Zeigen Sie, dass zwei Farey-benachbarte Brüche  $\frac{p_1}{q_1}$  und  $\frac{p_2}{q_2}$  jeweils gekürzt sein müssen.

**Lösung:** Nach Definition von Farey-benachbart gilt (wenn der zweite Bruch größer als der erste ist)  $p_2q_1 - p_1q_2 = 1$ . Daher kann es weder einen Teiler  $m > 1$  von  $p_1$  und  $q_1$  noch einen von  $p_2$  und  $q_2$  geben, da dieser auch  $p_2q_1 - p_1q_2$  teilen müsste.

- Zeigen Sie, dass der Mediant von zwei Farey-benachbarten Brüchen ebenfalls gekürzt ist.

**Lösung:** Folgt sofort aus der obigen Aussage und aus Lemma 3.6, das besagt, dass auch der Mediant zu beiden Brüchen Farey-benachbart ist.

- Ist die letzte Aussage noch wahr, wenn man statt Farey-benachbart nur gekürzt voraussetzt?

**Lösung:** Nein.  $\frac{1}{3} \oplus \frac{2}{3} = \frac{3}{6}$ .

- Mit wievielen Mediantenschritten gewinnen Sie  $\frac{8}{13}$  aus  $\frac{0}{1} < \frac{1}{1}$ ? Geben Sie alle Mediantenschritte an.

**Lösung:** 5 Schritte (alles Brüche aus aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen!)

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}.$$

- Zeigen Sie ausführlich, dass sich *jeder (gekürzte) Bruch*  $\frac{p}{q} \in [0, 1]$  nach endlich vielen Mediantenschritten, beginnend bei  $\frac{0}{1} < \frac{1}{1}$ , gewinnen lässt.

Hinweis: vollständige Induktion nach dem Nenner  $q$ .

**Lösung:** Induktionsanfang: Es gibt nur die beiden Ausgangsbrüche mit Nenner  $q = 1$ .

Sei  $q = n + 1$ . Die Induktionsannahme besagt, dass sich alle Brüche aus der Fareyfolge  $F_n$  durch endlich viele Mediantenschritte gewinnen lassen. Seien

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p}{n+1} < \frac{p_2}{q_2},$$

wobei  $\frac{p_j}{q_j}, j = 1, 2$  die dichtesten Nachbarn von  $\frac{p}{q}$  aus  $F_n$  sind. Nach Satz 3.7 sind diese beiden Farey-benachbart (im doppelten Sinne). Nach Lemma 3.8 ist entweder  $\frac{p}{q}$  der Mediant dieser beiden Nachbarn (dann sind wir fertig) oder es ist  $q = n + 1 > q_1 + q_2$ . Letzteres hat aber  $q_1 + q_2 \leq n$  zur Folge, so dass der Mediant dieser beiden Nachbarn auch zu  $F_n$  gehören würde. Es gibt dann noch dichter an  $\frac{p}{q}$  liegende Brüche aus  $F_n$ . Dies widerspricht der Annahme, dass  $\frac{p_j}{q_j}, j = 1, 2$  die dichtesten Nachbarn von  $\frac{p}{q}$  aus  $F_n$  sind.