

Aufgaben Fibonacci-Folgen

9. Mai 2006

Blatt 4

B. Werner SoSe 06

Präsenzaufgaben:**Aufgabe P13:**Sei $\omega = 0.31$ und (x_k) eine durch

$$x_{k+1} = x_k \oplus \omega, k = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 = 0$$

rekursiv definierte Folge von Winkeln aus S^1 . Berechnen Sie die ersten 10 Folgenglieder $x_1, x_2, \dots, x_{10}$.

Lösung:

0.31, 0.62, 0.93, 0.24, 0.55, 0.86, 0.17, 0.48, 0.79, 0.1

Ein **linker** bzw. **rechter Nachbar** von x_0 ist ein x_k , für das kein x_j mit $j < k$ zwischen Null und x_k liegt. Geben Sie alle linken und rechten Nachbarn mit Index ≤ 10 an.

Lösung: $x_1 = 0.31$ ist linker und rechter Nachbar, $x_2 = 0.62$ und $x_3 = 0.93$ sind linke, $x_4 = 0.25$ ist rechter Nachbar, $x_7 = 0.17$ ebenfalls, gefolgt von $x_{10} = 0.1$.

Wie oft hat die „Saatmaschine“ den Kreis umrundet, wenn sie einen Samen in x_{10} einsetzt?

Lösung: Wegen $10 \cdot 0.31 = 3.1$ genau 3 mal.

Wie groß wäre ω , wenn $x_{10} = 0$ nach genau dreimaligem Umrunden wäre?

Lösung: $\omega = 0.3$.

Aufgabe P14:Sei (x_k) die durch

$$x_{k+1} = x_k \oplus \omega, k = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 = 0$$

rekursiv definierte Folge von Winkeln mit einem unbekannten $\omega \in S^1$.

Es sei $11 \cdot \omega$ „ungefähr 5“, also $\omega \approx \frac{5}{11}$. Welche Informationen über ω erhalten Sie, wenn x_{11} ein rechter (linker) Nachbar von $x_0 = 0$ ist?

Lösung: Es wäre $\omega = \frac{5}{11}$, wenn $x_{11} = 0$. Da im rechten bzw. linken Fall ein wenig weiter (weniger) gedreht wurde, muss $\omega > \frac{5}{11}$ bzw. $\omega < \frac{5}{11}$ gelten.

Übungsaufgaben: (Abgabe 19. Mai 2006)**Aufgabe Ü11**

Bekanntlich (Kap. II.4.4.3) wird eine Drehung von $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$ durch eine 2×2 -Matrix

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

bestimmt. Dabei ist α der Drehwinkel im **Bogenmaß**. Messen wir den Winkel in unserem Maß ($\alpha \in S^1 = [0, 1)$), so lautet die Drehmatrix

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\alpha) & -\sin(2\pi\alpha) \\ \sin(2\pi\alpha) & \cos(2\pi\alpha) \end{pmatrix}$$

- Zeigen Sie

$$R(\alpha \oplus \beta) = R(\alpha) \cdot R(\beta),$$

wobei das Malzeichen die Matrizenmultiplikation bezeichnet.

Lösung: Man muss die beiden 2×2 -Matrizen miteinander multiplizieren und Additionstheoreme benutzen.

- Die Menge aller dieser Drehmatrizen bildet mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe. Welches ist das neutrale Element? Welche Drehmatrix ist invers zu $R(\alpha)$? **Lösung:** Das neutrale Element ist die Einheitsmatrix. Das inverse Element von $R(\alpha)$ ist $R(-\alpha) = R(1 - \alpha)$.

Aufgabe Ü12:

Berechnen Sie die ersten 20 Folgenglieder, die der Rekursion

•

$$\xi_{k+1} = \xi_k + \omega, k = 0, 1, 2, \dots, \quad \xi_0 = 0$$

(eine reelle Zahlenfolge)

•

$$x_{k+1} = x_k \oplus \omega, k = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 = 0$$

(eine Folge von Winkeln aus S^1)

genügen und zwar für a) $\omega = 0.2$ und b) $\omega = 0.21$.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen beiden Folgen?

Lösung:

$\omega = 0.2$:

$$\xi_k = k \cdot 0.2, k = 1, 2, \dots, 20.$$

$$x_k : 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.0, 0.2, \dots$$

$\omega = 0.21$:

$$\xi_k = k \cdot 0.21, k = 1, 2, \dots, 20.$$

$$x_k : 0.21, 0.42, 0.63, 0.84, 0.05, 0.26, 0.47, 0.68, 0.89, 0.10, 0.31, 0.52, 0.73, 0.94, \\ 0.15, 0.36, 0.57, 0.78, 0.99, 0.2$$

Es gilt $x_k = \xi_k \bmod 1$ (s. Vorlesung!).

Aufgabe Ü13:

- Betrachten Sie die Folge (x_k) aus Aufgabe Ü12 zu $\omega = 0.21$. Ein **linker** bzw. **rechter Nachbar** von x_0 ist ein x_k , für das kein x_j mit $j < k$ zwischen Null und x_k liegt. Geben Sie alle linken und rechten Nachbarn mit Index ≤ 20 an.

Lösung: *Linke Nachbarn:* $x_1, x_2, x_3, x_4 = 0.84, x_9 = 0.89, x_{14} = 0.94, x_{19} = 0.99$

Rechte Nachbarn: $x_1, x_5 = 0.05$

- Wenn Sie bisher richtig gerechnet haben, erhalten Sie $x_{20} = 0.2$ in der letzten Teilaufgabe. Welches sind die nächsten drei rechten Nachbarn von $x_0 = 0$ (gesucht sind die nächsten $k > 20$, so dass x_k rechter Nachbar ist; auch x_k ist gesucht.) Es wäre super, wenn Sie eine Gesetzmäßigkeit entdecken würden.

Lösung: $x_{24} = 0.04, x_{43} = 0.03, x_{62} = 0.02$.

Jeder Index ist die Summe des letzten rechten und des linken Index.

- Man wisse von einer durch

$$x_{k+1} = x_k \oplus \omega, k = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 = 0$$

rekursiv definierte Folge von Winkeln, dass x_{107} ein linker (rechter) Nachbar von $x_0 = 0$ ist und dass die Saatmaschine bis zum Samen Nr. 107 hierfür (im linken Fall fast) 37 Umrundungen benötigt. Was können Sie über ω schließen? Was ist, wenn $x_{107} = 0$?

Lösung: *Im linken Fall gilt $\omega < \frac{37}{107}$, im rechten Fall $\omega > \frac{37}{107}$. Wenn $x_{107} = 0$, gilt Gleichheit.*

Aufgabe Ü14:

- Definieren Sie mit Hilfe des Abstandsbegriffs $d(\alpha, \beta)$ auf S^1 die Begriffe **Grenzwert** und Häufungspunkt einer Folge (α_n) aus S^1 , vgl. Def. III.1.7 und Def. III.1.20.

Lösung: Definition:

*Eine Folge (α_n) aus S^1 hat einen **Grenzwert** $\alpha \in S^1$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit*

$$d(\alpha_n, \alpha) < \varepsilon \text{ für alle } n > n_0.$$

Man schreibt auch

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n.$$

Definition:

$\alpha \in S^1$ heißt ein Häufungspunkt der Folge (α_n) aus S^1 , wenn sich in jeder noch so kleinen ε -Nähe von α Folgenglieder α_n zu unendlich vielen Indizes n aufhalten. Genauer: Für alle $\varepsilon > 0$ enthält die Menge $M(\varepsilon) := \{n \in \mathbb{N} : d(\alpha_n, \alpha) < \varepsilon\}$ unendlich viele Elemente. Oder: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es stets ein $n > n_0$ mit $d(\alpha_n, \alpha) < \varepsilon$.

- Wogegen konvergiert die Folge (α_n) mit $\alpha_n := \cos(1/n)$? Hinweis: Sie können zunächst den Grenzwert in $\mathbb{R}$ berechnen und dann diesen in einen Winkel „umrechnen“.

Lösung:

Als reelle Zahlenfolge gegen Eins, in S^1 gegen $\alpha = 0$.

- Kann eine rekursiv definierte Folge

$$x_{k+1} = x_k \oplus \omega, k = 0, 1, 2, \dots$$

einen Grenzwert haben? Hier genügt eine weniger formal begründete, richtige Antwort.

Lösung: Nur, wenn $\omega = 0$.

Welche Häufungspunkte hat sie im Falle von rationalen Zahlen $\omega = \frac{p}{q}$ und im Falle von irrationalen Zahlen ω ?

Lösung: Es gibt im rationalen Fall die q Häufungspunkte $\frac{j}{q}, j = 0, 1, 2, \dots, q-1$. Im irrationalen Fall sind alle Winkel Häufungspunkte, da der Orbit dicht liegt.

- Definiere $f : S^1 \rightarrow S^1$ durch $x \mapsto 2x \bmod 1$ und betrachte die rekursiv definierte Folge

$$x_{k+1} = f(x_k), k = 0, 1, 2, \dots$$

Für welche x_0 konvergiert diese Folge? Gegen welchen Grenzwert? Auch hier genügt eine „intuitive“ Antwort.

Lösung: Wenn einmal $x_k = 0$, so bleiben alle nachfolgenden Folgenglieder bei $\alpha := 0$, d.h. es gilt dann $x_j = 0, j = k, k+1, \dots$. Wenn x_0 eine rationale Zahl ist mit einer Zweierpotenz im Nenner, so konvergiert (x_k) also gegen $\alpha = 0$.