

Aufgaben Fibonacci-Folgen

18. April 2006

B. Werner SoSe 06

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P6:

Auf wieviel verschiedene Weisen kann man $n \in \mathbb{N}$ als Summe von Einsen und Zweien schreiben, wobei es auf die Reihenfolge ankommen soll?

Lösung: Nenne die Anzahl A_n . Es ist $A_1 = 1, A_2 = 2$. Nun stelle $n+1$ dar. Der letzte Summand ist eine 1 (dann ergibt die erste Summe n) oder eine 2. Dann ergibt die erste Summe $n-1$. Also gilt $A_{n+1} = A_n + A_{n-1}$, woraus sich zusammen mit den Anfangsbedingungen $A_n = F_{n+1}$ ergibt.

Wie mit den Ziegelsteinen.

Aufgabe P7:

Formulieren und zeigen Sie die folgenden Aussagen:

Die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen ergibt die um Eins verminderte $n+2$ -te Fibonacci-Zahl.

Lösung:

$$\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1.$$

Beweis(skizze) durch vollständige Induktion: Nenne

$$s_n := \sum_{k=1}^n F_k.$$

Zu zeigen ist $s_n = F_{n+2} - 1$, was für $n = 1$ richtig ist. Es ist

$$s_{n+1} = s_n + F_{n+1}.$$

Wegen der Induktionsannahme gilt $s_n = F_{n+2} - 1$, so dass man

$$s_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1}$$

erhält. Zu zeigen ist (Ind.Schluss) $s_{n+1} = F_{n+3} - 1$, was aus der vorletzten Gleichung wegen $F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$ folgt.

Aufgabe P8:

Von einer Folge (a_n) , die der F-Rekursion genügt, seien $a_7 = 10$ und $a_{11} = 107$ bekannt. Bestimmen Sie a_8, a_9 und a_{10} .

Lösung: Man kann ein LGS mit $x := a_8, y := a_9, z := a_{10}$ aufstellen:

$$a_7 + x = y, x + y = z, y + z = a_{10}, a_7 = 10, a_{10} = 107$$

mit Lösung $x = a_8 = 29, y = a_9 = 39, z = a_{10} = 68$.

Oder: Man könnte auch die geshiftete Folge $b_n := a_{n+7}$ betrachten, die $b_0 = 10, b_4 = 107$ erfüllt und der Fibonacci-Rekursion genügt. Aus Satz 1.4 folgt $b_n = 10F_{n-1} + xF_n$, wobei $x = b_1 = a_8$ unbekannt ist. Aus $107 = b_4 = 10F_3 + xF_4 = 20 + 3x$ erhält man $x = 87/3 = 29$ und hieraus auch $b_2 = 39 = a_9, b_3 = 68 = a_{10}$.

Übungsaufgaben: (Abgabe 28. April 2006)

Aufgabe Ü4

Formulieren und zeigen Sie die folgenden Aussagen:

Die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen mit ungeradem Index ergibt F_{2n} .

Lösung:

$$\sum_{k=1}^n F_{2k-1} = F_{2n}.$$

Die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen mit geradem Index ergibt $F_{2n+1} - 1$.

Lösung:

$$\sum_{k=1}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1.$$

Beide Aussagen können mit vollständiger Induktion bewiesen werden. Man kann sie aber auch auf

$$\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1$$

in P7 zurückführen:

So folgt ja aus letzterer

$$\sum_{k=1}^{2n-2} F_k = F_{2n} - 1.$$

Nun gilt $F_1 + F_2 = F_3, F_3 + F_4 = F_5, \dots, F_{2n-3} + F_{2n-2} = F_{2n-1}$, so dass

$$\sum_{k=2}^n F_{2k-1} = F_{2n} - 1.$$

Jetzt braucht man nur noch $F_1 = 1$ als ersten Summanden hinzufügen.

Entsprechend kann man

$$F_0 + F_1 = F_2, F_2 + F_3 = F_4, \dots, F_{2n-2} + F_{2n-1} = F_{2n}$$

benutzen und erhält

$$\sum_{k=0}^{2n-1} F_k = \sum_{k=1}^n F_{2k}.$$

Die linke Summe ist wegen P7 gleich $F_{2n+1} - 1$, was zu zeigen war.

Aufgabe Ü5:

Von einer Folge (a_n) , die der F-Rekursion genügt, seien $a_7 = 10$ und $a_{22} = 15970$ bekannt. Bestimmen Sie a_8 . Hinweis: Machen Sie sich das Leben nicht zu schwer!

Lösung: Man kann $b_n := a_{n+7}$ setzen. Dann genügt b_n der Fibonacci-Rekursion und $b_0 = a_7 = 10$ sowie $b_{15} = a_{22} = 15970$. Nach Satz 1.4 ist $b_n = 10F_{n-1} + b_1F_n$ mit gesuchtem $x := b_1 = a_8$. Es ist dann $15970 = b_{15} = 10F_{14} + xF_{15} = 3770 + 610x$, woraus $x = (15970 - 3770)/610 = 20$ folgt. Daher gilt $a_8 = 20$.

Aufgabe Ü6

- Man zeige

$$F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_{2n}$$

Hinweis: Betrachte die Folge $a_k := F_{n+k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Lösung: Die Folge $a_k := F_{k+n}$ genügt der Fibonacci-Rekursion und hat die Anfangswerte $a_0 = F_n$ und $a_1 = F_{n+1}$. Nach Satz 1.4 über die LK von Lösungen der linearen Differenzengleichung der Fibonacci-Rekursion gilt

$$a_k = F_{k+n} = F_{k-1}a_0 + F_k a_1 = F_{k-1}F_n + F_k F_{n+1}.$$

Mit $k = n$ folgt die Behauptung.

- Man zeige F_n teilt F_{2n} .

Folgt sofort aus obiger Aussage.

- Man zeige: Falls m ein Teiler von n ist, so ist F_m ein Teiler von F_n .

Lösung: Wir knüpfen an obiges

$$F_{k+n} = F_{k-1}F_n + F_k F_{n+1},$$

ersetzen aber n durch m und setzen $k := mj$:

$$F_{mj+m} = F_{mj-1}F_m + F_{mj}F_{m+1},$$

bzw.

$$F_{(m+1)j} = F_{mj-1}F_m + F_{mj}F_{m+1}.$$

Hieraus folgt: Wenn F_{mj} von F_m geteilt wird, so auch $F_{(m+1)j}$. Dies ist der entscheidende Induktionsschritt: Da wir schon wissen, dass für $j = 1$, ja sogar für $j = 2$ die Fibonacci-Zahl F_{mj} von F_m geteilt wird, teilt F_m jedes F_{jm} für $j \in \mathbb{N}$, also insbesondere F_n , wenn n ein Vielfaches von m ist.

- Ist $F_n > 3$ eine Primzahl, so auch n .

Lösung: Indirekter Beweis: Sei $n = km$ keine Primzahl, so teilen wegen des vorangehenden Teils dieser Aufgabe sowohl F_k als auch F_m die Zahl F_n . Wir erhalten einen Widerspruch zur Primzahleigenschaft von F_n , falls $F_k > 1$ oder $F_m > 1$. Falls beide gleich 1, so gilt $k \leq 2$ und $m \leq 2$, also $n = km \leq 4$, also $F_n \leq F_4 = 3$ im Widerspruch zur Annahme $F_n > 3$.

Anders formuliert: Da $F_n > 3$ gilt $k > 2$ oder $m > 2$ und somit $F_k \geq 2$ oder $F_m \geq 2$.

- Gilt die Umkehrung der letzten Aussage?

Lösung: Nein. $n = 19$ ist eine Primzahl, aber $F_{19} = 4181 = 113 \cdot 37$ nicht.

Aufgabe Ü7

Zeigen Sie

$$\Phi^n = F_n \Phi + F_{n-1}.$$

Lösung: Vollständige Induktion, basierend auf $\Phi^2 = \Phi + 1$

Oder: Folgt aus dem Satz 1.4 über LKn von Basisfolgen für die Fibonacci-Rekursion: Die Folge $c_n := \Phi^n$ genügt $c_0 = 1, c_1 = \Phi$. Daher gilt

$$c_n = 1 \cdot F_{n-1} + \Phi F_{n-1}.$$