Lösungen für das Modul Ma-P3/WiMa-ABK2 Software-Praktikum

Blatt 8

- **Aufgabe 1**

```
Diffn:=proc(f,n) local t,g;
g:=f;
for i from 1 to n do g:=unapply(diff(g(t),t),t) od;
RETURN(unapply(map(g,t)),t)
end;
```

- **Aufgabe 2** Die Funktion f ist in $x = 0$ genau dann differenzierbar, wenn die linksseitige und rechtsseitige Ableitung existieren und übereinstimmen. Da f für $x \leq 0$ konstant 0 ist, sind alle linksseitigen Ableitungen bei $x = 0$ ebenfalls gleich 0. f ist folglich n-mal bei 0 differenzierbar, wenn die n-te rechtsseitige Ableitung existiert und gleich 0 ist. Für die Fälle $n = 1, \ldots, 10$ kann dies mit dem Befehl `limit(Diffn(f,n)(t),t=0,right)` überprüft werden. Tatsächlich liefert MAPLE immer den Wert 0.
  Es bleibt noch zu zeigen, dass $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig ist. Die einzige Stelle des Definitionsbereiches, an der die Stetigkeit unklar ist, ist $x = 0$. Substituiert man $y := \frac{1}{x}$, so ist

$$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

  äquivalent zu

$$\lim_{y \to \infty} f^{(n)}(y) = 0.$$

  Durch Induktion kann man zeigen, dass sich $f^{(n)}(y) = P_n(y) \cdot e^{-y^2}$ schreiben lässt für $y > 0$, wobei P_n ein Polynom vom Grad $3n$ bezeichnet. Bekanntlich gilt

$$\lim_{y \to \infty} \frac{P_n(y)}{e^{y^2}} = 0.$$

  Damit ist die n-te Ableitung von f bei $x = 0$ stetig.

- **Aufgabe 3**

```
Tayl:=proc(f,a,n) local g,h;
g := unapply(f(x), x)
h := unapply(convert(taylor(g(x), x = a, n+1), polynom), x)
end;
```

- **Aufgabe 4** Der Befehl `evalf(allvalues(solve((D(f))(x), x)))` liefert die Lösungen $0,5123412196$, $-0,5123412196$, $-1,335012414$ und $1,335012414$.

Hierbei ist der `evalf`-Befehl erforderlich, da MAPLE für die Lösungen keine explizite Form findet und deshalb nur mittels numerischer Verfahren Approximationen angeben kann.
Der Befehl `plot([f(x), (Tayl(f, 0.5123412196, 4))(x)], x = 0 .. 2, color = [red, blue])` plottet den Graphen von f und vom Taylorpolynom in das selbe Koordinatensystem.