Lösungen für das Modul Ma-P3/WiMa-ABK2
Software-Praktikum
Blatt 3

- **Aufgabe 1** Das Paket `LinearAlgebra` wird mit dem Befehl `with(LinearAlgebra);` aufgerufen. Der Befehl

```
A:=Matrix(10,(i,j)->i^2+j^2);
```

erzeugt die gewünschte Matrix. Da $A_{i,j} = i^2 + j^2 = A_{j,i}$ gilt, ist A symmetrisch und damit trivialerweise normal.
Der Befehl

```
printlevel:=3;
for i to 10 do
for j to 10 do
if isprime(A[i, j]) then [i, j, A[i, j]] fi;
od;
od;
```

gibt alle Primzahlen in A und die zugehörigen Zeilen- und Spaltennummer aus.

- **Aufgabe 2** Der Befehl

```
RandomMatrix(4,shape=symmetric);
```

erzeugt eine symmetrische Zufallsmatrix mit ganzzahligen Einträgen. Durch den Befehl

```
RandomMatrix(4,generator=-1.0..1.0,shape=symmetric);
```

werden die Einträge in der symmetrischen Zufallsmatrix reell, liegen aber im Intervall $[-1, 1]$.

- **Aufgabe 3** Mit Hilfe des Befehl `factor` lässt sich die Determinante von $A(n)$ als Produkt von Linearfaktoren schreiben.
$n = 1: \quad 1$
$n = 2: \quad x_2 - x_1$
$n = 3: \quad -(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)$
$n = 4: \quad (x_3 - x_4)(x_2 - x_4)(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)$
$n = 5: \quad \prod_{1 \le i < j \le 5}(x_j - x_i)$
Für $n \geq 1$ ist die Determinate also genau dann ungleich null, wenn die x_i alle paarweise verschieden sind.

Allgemein gilt:

$$det(A(n)) = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Für $n = 1$ gilt offenbar die Gleichung. Gelte nun die Behauptung für $n - 1$.

$$A(n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & x_{n-1}^3 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Die Determinante ändert nicht ihren Wert, wenn man zu jeder Spalte das x_1-fache der linken Spalte daneben subtrahiert.

$$\begin{aligned}
\det(A(n)) &= \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 - x_1 & x_1^2 - x_1 \cdot x_1 & \dots & x_1^{n-1} - x_1 \cdot x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_2 \cdot x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1 \cdot x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 \cdot x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1 \cdot x_n^{n-2} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{pmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_1) \det\begin{pmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{pmatrix} \\
&= \prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1) \cdot \prod_{2\le i<j\le n} (x_j - x_i) \\
&= \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)
\end{aligned}$$

- **Aufgabe 4**

```
Tr:=proc(A);
if Dimension(A)[1]<>Dimension(A)[2] then print(‘Fehler!
Bitte geben Sie eine quadratische Matrix ein! ’)
else add(A[i,i],i=1..Dimension(A)[1]) fi;
end;
```

- **Aufgabe 5** Die kleinste Primzahl p, für die die Matrix invertierbar modulo p ist, ist $p = 5$. Dies kann mit dem Befehl `Determinant(A) mod p`

überprüft werden, wobei hier p mit der entsprechenden Primzahl zu ersetzen ist.
Für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

ist $p = 3$ die kleinste Primzahl derart, dass A modulo p invertierbar ist.