Lösungen für das Modul Ma-P3/WiMa-ABK2
Software-Praktikum
Blatt 10

- **Aufgabe 1** Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung lautet

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{j=1}^{n} b_jx_j + c = 0.$$

O.B.d.A. kann man annehmen, dass die Matrix $A := (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ symmetrisch ist. A lässt sich dann orthogonal diagonalisieren, d.h. es gibt eine orthogonale Matrix T, so dass $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat. Die kanonischen Koordinaten sind dann durch $y := T^{-1}x$ gegeben.
Für die Gleichung $f(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 - z^2 + 2xy = 0$ erhält man

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gibt man bei MAPLE den Befehl `Eigenvalues(A)` ein, so erhält man drei Eigenvektoren von A, die alle orthogonal zueinander stehen. Durch Normalisierung dieser Eigenvektoren erhält man die orthogonale Matrix

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die A diagonalisiert. Die kanonischen Koordinaten a, b, c erhält man dann durch die Substitution $(x,y,z)^T = T\cdot(a,b,c)^T$, d.h.

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} \\ z &= c. \end{aligned}$$

Dies führt durch Einsetzen zur kanonischen Form

$$4a^2 + 2b^2 - c^2 = 0.$$

- **Aufgabe 2** Durch den Befehl

```
implicitplot3d(f(x,y,z)=0,x=-1..1,y=-1..1,z=-1..1)
```

wird die Nullstellenmenge von f innerhalb des Würfels $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$ visualisiert.

- **Aufgabe 3** Die Lösungemenge der Gleichung

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + sxy = 0$$

wird durch den Befehl

```
animate(implicitplot,
[x^ 2/4-y^ 2/9+s*x*y=0,x=-1..1,y=-1..1],s=-4..4);
```

visualisiert.

- **Aufgabe 4** Für den Beweis, kann man einige Rechenschritte von MAPLE übernehmen lassen. Hierbei sind die Abbildungen

```
A:=t->Matrix([[cos(t),sin(t)], [-sin(t),cos(t)]]);
f:=(x,y)->x^  2+y^  2-1;
```

hilfreich. Sei $(x, y) \in Q$. es ist dann $f(A(t)(x, y)^T) = 0$ zu zeigen. Diese Zahl berechnet man in MAPLE mit dem Befehl

```
f((A(t).Vector([x, y]))[1], (A(t).Vector([x, y]))[2]);
```

MAPLE gibt dann als Ergebnis

$$(cos(t)x + sin(t)y)^2 + (-sin(t)y + cos(t)x)^2 - 1$$

aus. Rechnet man die Klammern aus, so erhält man

$$cos^2(t)x^2 + sin^2(t)y^2 + sin^2(t)x^2 + cos^2(t)y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Für den Beweis der Gleichung $A(t)A(s) = A(t+s)$ benutze man den Befehl

```
A(t).A(s);
```

MAPLE gibt dann die Matrix

$$\begin{pmatrix} cos(t)cos(s) - sin(t)sin(s) & cos(t)sin(s) + sin(t)cos(s) \\ -sin(t)cos(s) - cos(t)sin(s) & cos(t)cos(s) - sin(t)sin(s) \end{pmatrix}$$

aus. Aus den Additionstheoremen

$$sin(t \pm s) = sin(t)cos(s) \pm sin(t)cos(s)$$

$$cos(t \pm s) = cos(t)cos(s) \mp sin(t)sin(s)$$

folgt dann die Behauptung.