

Mathematik III für Studierende der Physik

Vorlesungsskript

Jörg Teschner *
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
www.math.uni-hamburg.de/home/teschner †
Hamburg, Wintersemester 2017/18

Inhaltsverzeichnis

1	Das Lebesgue-Integral	1
1.1	Zugänge zur Lebesgueschen Integrationstheorie	1
1.2	Das Lebesgue-Integral und zwei “kleine” Sätze	8
1.3	Messbarkeit, Nullmengen	17
1.4	Vollständigkeit von $L^1(\mathbb{R}^n)$, Konvergenzsätze	27
1.5	Parameterabhängige Integrale, der Satz von Fubini und der Transformationsatz	32
2	Distributionen und Fouriertransformation	46
2.1	Distributionen, Faltung von Funktionen und Distributionen	46
2.2	Fourier-Transformation und temperierte Distributionen	57
2.3	Einige Bemerkungen zu Funktionenräumen	66
3	Integration auf Mannigfaltigkeiten	70
3.1	Mannigfaltigkeiten	70
3.2	Der Gaußsche Integralsatz	79
4	Partielle Differentialgleichungen	89
4.1	Grundlegende Definitionen	89
4.2	Die Potentialgleichung	92
4.3	Die Wärmeleitungsgleichung	103
4.4	Die Wellengleichung	108
5	Tensorprodukte und Differentialformen	123
5.1	Tensorprodukte	123
5.2	Differentialformen und der Stokessche Integralsatz	131

*mit Dank an E. Bönecke, R. Holtkamp, B. Richter, C. Schweigert, B. Siebert

†Version vom 20. Oktober 2017

1 Das Lebesgue-Integral

1.1 Zugänge zur Lebesgueschen Integrationstheorie

Wir folgen [K, §7.1-2.]. Wir erinnern zunächst an den Riemannsches Integralbegriff:

Definition 1.1.1

1. Eine (reellwertige) Treppenfunktion auf einem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form

$$\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad \varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} \equiv c_i.$$

Für eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist das Oberintegral

$$\int_a^{*b} f(x)dx := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx \mid \varphi \text{ Treppenfunktion}, \forall x : \varphi(x) \geq f(x) \right\}$$

und das Unterintegral

$$\int_{*a}^b f(x)dx := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx \mid \varphi \text{ Treppenfunktion}, \forall x : \varphi(x) \leq f(x) \right\}.$$

Man beachte, dass hier eingeht, dass \mathbb{R} ein geordneter Körper ist.

2. Wir haben dann definiert, dass eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar heißt, genau dann, wenn Oberintegral und Unterintegral übereinstimmen:

$$\int_a^{*b} f(x)dx = \int_{*a}^b f(x)dx$$

Bemerkungen 1.1.2.

1. Aus der Definition folgt sofort: ist f unbeschränkt, so ist

$$\int^* f \text{ oder } \int_* f = \pm\infty.$$

Betrachten Sie z.B.

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Für eine nach oben unbeschränkte Funktion gibt es keine Treppenfunktion φ mit $\varphi \geq f$.

2. Wir betrachten für die unbeschränkte Funktion $f(x) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

als *uneigentliches Integral*:

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2$$

Wir können hier nicht direkt mit dem “ersten Teilintervall” der Zerteilung des Urbildbereichs umgehen und nehmen daher einen Grenzwert. Im Lebesgue-Integral wird stattdessen der *Zielbereich* geteilt, $-\infty < y_1 < \dots < y_k < \infty$ und man setzt $\int f = \lim \sum y_i \cdot \text{Länge}(f^{-1}[y_{i-1}, y_i])$.

3. Als weiterem Integral wollen wir

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} =$$

einen Sinn geben. Wir versuchen verschiedene Möglichkeiten:

(a)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Die beiden Integrale existieren einzeln nicht, da $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon$ nicht existiert.

(b) Wir nehmen den Grenzwert bei beiden Integralen *gleichzeitig*:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

(c) Das Vorgehen ist aber recht willkürlich: wir wählen die Grenzen links und rechts der Null unterschiedlich, etwa:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{2\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left([-\ln x]_{\varepsilon}^1 + [\ln x]_{2\varepsilon}^1 \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\ln \varepsilon + \ln 2\varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\ln \varepsilon + \ln 2 + \ln \varepsilon) = \ln 2 \end{aligned}$$

Hätten wir ein anderes Verhältnis für die Grenzen gewählt, so hätten wir auch $\ln 3$ oder andere Werte bekommen können.

4. Betrachte die stetige Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x > 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass das uneigentliche Integral existiert:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Es existiert dann aber nicht das Integral des Absolutbetrags $|f|$:

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{n=1}^\infty \frac{c}{n} = \infty$$

für eine geeignete Konstante c . Für Lebesgue-Integrale gilt in dieser Situation dagegen: f ist integrierbar genau dann, wenn $|f|$ integrierbar ist. (Hier ist also das Riemann-Integral etwas leistungsfähiger.)

5. Betrachte die *Dirichlet-Funktion* mit einer dichten Menge an Sprungstellen

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ober- und Unterintegral berechnen sich zu

$$\int_0^{*1} f(x) dx = 1 \quad \text{und} \quad \int_{*0}^1 f(x) dx = 0$$

Da sie verschieden sind, ist die Dirichlet-Funktion nicht Riemann-integrierbar.

Andererseits passt die Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ in eine abzählbare Vereinigung $\bigcup_i [a_i, b_i]$ von Intervallen, die so gewählt werden kann, dass ihre Gesamtlänge kleiner als $\sum_i |b_i - a_i| < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ ist.

Um das zu sehen, wähle eine Abzählung q_1, q_2, \dots von \mathbb{Q} . Wähle ein α mit $0 < \alpha < 1$ und setze

$$[a_i, b_i] := \left[q_i - \frac{1}{2}\alpha^i, q_i + \frac{1}{2}\alpha^i \right],$$

Dann ist

$$\sum_{i=1}^\infty |b_i - a_i| = \sum_{i=1}^\infty \alpha^i = \alpha \sum_{i=0}^\infty \alpha^i = \alpha \frac{1}{1 - \alpha}$$

was für $\alpha \rightarrow 0$ beliebig klein wird. Man hätte daher gerne einen Integralbegriff, für den $\int_0^1 f(x) dx = 0$ gilt.

6. Das Riemann-Integral hat Eigenschaften, die für die Praxis ungünstig sind: betrachte eine Funktionenfolge $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wissen: konvergiert f_n in der Supremumsnorm gegen f , so konvergieren die Riemann-Integrale:

$$\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f.$$

Dies folgt, weil $\|f_n - f\| < \varepsilon$ impliziert

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \varepsilon |b - a|.$$

Punktweise Konvergenz, also $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für alle $x \in [a, b]$ reicht aber nicht aus, um auf Konvergenz der Integrale zu schließen.

Für das Lebesgue-Integral gilt aber der Satz von der majorisierten Konvergenz: gilt $f_n(x) \rightarrow f(x)$ (sogar bis auf einer Menge vom Volumen Null) und existiert eine integrierbare Funktion g mit $|f_n| \leq |g|$, so ist f integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

7. Wir hatten schon in der Theorie der Fourier-Reihen gesehen, dass wir durch Riemann-quadratintegrale Funktionen keinen Hilbert-Raum erhalten.

Die Dirichlet-Funktion ist ein Beispiel einer charakteristischen Funktion:

Definition 1.1.3

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die charakteristische Funktion oder auch Indikatorfunktion der Teilmenge A ist die Funktion

$$1_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Insbesondere ist die Dirichlet-Funktion die charakteristische Funktion $f = 1_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$.

Bemerkung 1.1.4.

Es gibt zwei Vorgehensweisen für eine sinnvolle Integrationstheorie:

- Über Maßtheorie. Wir zerlegen nicht, wie beim Riemann-Integral, den Urbildbereich, sondern den Bildbereich einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$-\infty < c_1 < c_2 < \dots < c_k < \infty$$

und approximieren das Integral durch die endliche Summe

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i \cdot \mu(f^{-1}([c_i, c_{i+1}])).$$

Damit vermeiden wir das Problem des Riemann-Integrals, dass die Funktion beschränkt sein muss. Wir brauchen aber dann ein *Maß*, also eine Funktion, die (zumindest gewissen) Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Volumen, also eine Zahl $\mu(A) \in \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ zuordnet. Solche Maße sind nicht ganz leicht zu konstruieren, sind aber für Anwendungen von unabhängiger Bedeutung.

- Über Funktionenräume: wir approximieren wieder Funktionen durch Treppenfunktionen, aber verwenden einen anderen Approximationbegriff, der durch die L^1 -Halbnorm gegeben ist. Diesen Zugang werden wir nun für Funktionen auf dem \mathbb{R}^n verfolgen.

Definition 1.1.5

- Ein Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist das direkte Produkt $I_1 \times \dots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ von n beschränkten, nicht-leeren Intervallen $I_\mu \subseteq \mathbb{R}$. Diese Intervalle dürfen offen, halboffen, abgeschlossen sein und auch aus einem einzigen Punkt bestehen. Eindimensionale Quader sind also die Intervalle (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, wobei im letzten Fall auch $a = b$ sein darf.
- Das Volumen eines solchen Quaders ist die nicht-negative reelle Zahl

$$v(Q) := v_n(Q) := \prod_{\mu=1}^n |I_\mu| = \prod_{\mu=1}^n (b_\mu - a_\mu).$$

In einer Hyperebene enthaltene Quader Q haben das Volumen 0; man nennt sie ausgeartete Quader.

3. Eine Funktion $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Treppenfunktion auf \mathbb{R}^n , wenn es endlich viele paarweise disjunkte Quader $Q_i \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

- (a) die Funktion φ auf jedem Quader Q_k konstant ist.
- (b) $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup Q_k$ gilt.

Bemerkungen 1.1.6.

1. Man beachte, dass man die Vereinigung endlich vieler Quader auch als die Vereinigung endlich vieler *disjunkter* Quader darstellen kann.
2. Man zeige, dass wenn φ, ψ Treppenfunktionen sind, auch
 - (a) ihre Summe $\varphi + \psi$
 - (b) jedes skalare Vielfache $\lambda\varphi$
 - (c) der Absolutbetrag $|\varphi|$
 - (d) im Fall von reellwertigen Treppenfunktionen: Maximum $\max(\varphi, \psi)$ und Minimum $\min(\varphi, \psi)$

Treppenfunktionen sind. Insbesondere bilden Treppenfunktionen einen Vektorraum.

3. Treppenfunktionen lassen sich schreiben als endliche Summe charakteristischer Funktionen *disjunkter* Quader $Q_i \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\varphi = \sum_{i \in E} c_i \mathbf{1}_{Q_i} \quad \text{mit } c_i \in \mathbb{C} \text{ und } E \text{ endlich.} \tag{1}$$

Umgekehrt ist jede endliche Summe von charakteristischen Funktionen von Quadern eine Treppenfunktion, auch wenn die Quader nicht disjunkt sind.

4. Wir könnten auch Funktionen mit Werten in einem reellen oder komplexen Banachraum betrachten.

Definition 1.1.7

Das Integral einer Treppenfunktion der Form (1) mit disjunkten Quadern ist die komplexe Zahl

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx := \sum_{i \in E} c_i v(Q_i).$$

Satz 1.1.8.

Dieses Integral ist wohldefiniert, hängt also nicht von der Darstellung der Treppenfunktion als Linearkombination charakteristischer Funktionen von disjunkten Quadern ab.

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

1. \int ist eine lineare Abbildung auf dem Vektorraum der Treppenfunktionen.
2. Sei φ eine Treppenfunktion. Dann gilt: $|\int \varphi dx| \leq \int |\varphi| dx$.
3. (Monotonie:) Sind φ, ψ reellwertige Treppenfunktionen und gilt $\varphi \leq \psi$, so folgt $\int \varphi dx \leq \int \psi dx$.

Beweis.

Um zu zeigen, dass das Integral wohldefiniert ist, verwenden wir Induktion nach der Dimension n ; der Fall $n = 1$ wurde bereits im ersten Semester erledigt und ist elementar.

Für den Induktionsschritt zerlege $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ mit $0 < p < n$. Wir schreiben entsprechend $\mathbb{R}^n \ni z = (x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}^p$ und $y \in \mathbb{R}^{n-p}$. Entsprechend schreiben wir Quader als Produkte von Quadern:

$$Q = Q^p \times Q^{n-p};$$

man beachte, dass für die charakteristische Funktion gilt

$$\mathbf{1}_Q(x, y) = \mathbf{1}_{Q^p}(x) \cdot \mathbf{1}_{Q^{n-p}}(y).$$

Sei φ Treppenfunktion wie in (1), dann gilt:

$$\varphi(x, y) = \sum_k c_k \mathbf{1}_{Q_k}(x, y) = \sum_k c_k \mathbf{1}_{Q_k^p}(x) \cdot \mathbf{1}_{Q_k^{n-p}}(y)$$

Für jedes festes $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ erhalten wir eine Treppenfunktion

$$\varphi_y = \sum_k c_k \mathbf{1}_{Q_k^{n-p}}(y) \cdot \mathbf{1}_{Q_k^p}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{C}$$

Nach Induktionsannahme hat jede Treppenfunktion φ_y ein wohldefiniertes Integral; dies ergibt eine Funktion auf \mathbb{R}^{n-p}

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_y(x) dx = \sum_k c_k v_p(Q_k^p) \mathbf{1}_{Q_k^{n-p}}(y),$$

die eine Treppenfunktion ist und die darum, wiederum nach Induktionsannahme, das wohldefinierte Integral

$$\int_{\mathbb{R}^{n-p}} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x, y) dx \right) dy = \sum_k c_k v_p(Q_k^p) \cdot v_{n-p}(Q_k^{n-p}) = \sum_k c_k v(Q_k)$$

besitzt. Die linke Seite ist nach den Induktionsannahmen unabhängig von der Darstellung der Treppenfunktion φ . Wir setzen daher

$$\int \varphi(z) dz := \sum_k c_k v_n(Q_k).$$

Mit Hilfe dieser Formel beweist man auch induktiv die Rechenregeln. □

Aus dem Beweis folgt sofort:

Korollar 1.1.9 (Satz von Fubini für Treppenfunktionen).

Mit obigen Bezeichnungen gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{n-p}} \left(\int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-p}} \varphi(x, y) dy \right) dx.$$

Bemerkung 1.1.10.

Wir betrachten ab jetzt – und nur im Rahmen der Integrationstheorie! – Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dabei gelten die folgenden Konventionen:

$$\infty \pm c = c \pm \infty := \infty \text{ für alle } c \in \mathbb{C}.$$

$$\infty \cdot c = c \cdot \infty := \infty \text{ für alle } c \in \mathbb{C}^* \cup \{\infty\},$$

$$\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty := 0.$$

Das Integral $\int_{\mathbb{R}} f$ soll den Flächeninhalt unter dem Graphen von f liefern. Dazu wollen wir den Graphen von f mit Rechtecken endlicher Größe überdecken. Da wir zulassen wollen, dass die Funktion auf ganz \mathbb{R} definiert und auch unbeschränkt ist, brauchen wir möglicherweise abzählbar unendlich viele Rechtecke.

Definition 1.1.11

1. Gegeben sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Eine Hüllreihe zu f ist eine Reihe

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{1}_{Q_k} \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

wobei

(a) Q_k offene Quader im \mathbb{R}^n sind.

(b) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|f(x)| \leq \Phi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{1}_{Q_k}(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Wir definieren den Inhalt der Hüllreihe Φ durch die Summe

$$I(\Phi) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k v(Q_k) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

2. Unter der L^1 -Halbnorm von $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ versteht man das Infimum

$$\|f\|_1 := \inf\{I(\Phi) \mid \Phi \text{ Hüllreihe zu } f\}.$$

Bemerkung 1.1.12. Es liegt keine Norm vor: Es ist ∞ als Wert zugelassen, und aus $\|f\|_1 = 0$ folgt nicht $f = 0$. Ein Beispiel für letzere Aussage ist die charakteristische Funktion eines Quaders A , der in einer Hyperebene enthalten ist. Man findet offene Quader beliebig kleiner Dicke. Daher ist das Infimum Null, aber die charakteristische Funktion 1_A ist nicht null.

Satz 1.1.13.

Für Funktionen $f, f_k (k \geq 1): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $c \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\|c \cdot f\|_1 = |c| \cdot \|f\|_1,$
2. $|f_1| \leq |f_2| \Rightarrow \|f_1\|_1 \leq \|f_2\|_1,$

3. die verallgemeinerte Dreiecksungleichung: sei (f_k) eine Familie von Funktionen. Dann gilt

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_1.$$

Beweis.

Die ersten beiden Aussagen lassen sich durch Betrachtung von Mengen von Hüllreihen beweisen. Wir zeigen nur die verallgemeinerte Dreiecksungleichung, und zwar für nicht-negative Funktionen $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Sei $\epsilon > 0$. Wähle für jede Funktion f_k eine Hüllreihe $\Phi_k := \sum_i c_{ik} 1_{Q_{ik}}$ mit Inhalt

$$I(\Phi_k) \leq \|f_k\|_1 + \frac{\epsilon}{2^k}.$$

Dann ist die Summe

$$\Phi := \sum_k \Phi_k = \sum_{i,k} c_{ik} 1_{Q_{ik}}$$

eine Hüllreihe für $\sum_k f_k$. Sie hat Inhalt

$$I(\Phi) = \sum_{ik} c_{ik} v(Q_{ik}) = \sum_k \sum_i c_{ik} v(Q_{ik}) \leq \sum_k \|f_k\|_1 + \epsilon.$$

□

1.2 Das Lebesgue-Integral und zwei “kleine” Sätze

Lemma 1.2.1.

1. Für die charakteristische Funktion eines abgeschlossenen Quaders $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\|\mathbf{1}_A\|_1 = v(A) = \int \mathbf{1}_A dx$.
2. Für jede Treppenfunktion φ auf \mathbb{R}^n gilt $\|\varphi\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| dx$.

Beweis.

1. Indem man offene Quader Q mit $v(Q) = v(A) + \epsilon$ betrachtet, stellt man fest, dass $\|\mathbf{1}_A\|_1 \leq v(A)$ gilt.

Unter Ausnutzung der Kompaktheit von A zeigt man, dass für jede Hüllreihe $\Phi = \sum c_k \mathbf{1}_{Q_k}$ zu $\mathbf{1}_A$ gilt, dass $I(\Phi) \geq v(A)$ (Übg). Damit gilt auch $\|\mathbf{1}_A\|_1 \geq v(A)$.

2. Da die Treppenfunktionen $|\varphi|$ und φ die gleiche Menge von Hüllreihen und damit die gleiche Halbnorm $\|\cdot\|_1$ besitzen, nehmen wir $\varphi \geq 0$ an. Betrachte eine Darstellung

$$\varphi = \sum_{k=1}^s c_k 1_{Q_k} + \sum_{i=1}^r d_i 1_{R_i}$$

mittels disjunkter Quader, wobei die Quader Q_k offen sind und die Quader R_i das Volumen Null haben. Weil die Quader disjunkt sind, folgt aus $\varphi \geq 0$, dass $c_k \geq 0$ und $d_i \geq 0$ gilt.

Für $\epsilon > 0$ können wir für jeden Quader R_i einen offenen Quader $R_i^* \supset R_i$ mit $v(R_i^*) \leq \epsilon$ wählen. Dann ist

$$\Phi := \sum_{k=1}^s c_k 1_{Q_k} + \sum_{i=1}^r d_i 1_{R_i^*}$$

eine Hüllreihe zu φ . Es folgt

$$\|\varphi\|_1 \leq I(\Phi) = \sum_{k=1}^s c_k v(Q_k) + \epsilon \sum_{i=1}^r d_i$$

und daher

$$\|\varphi\|_1 \leq \sum_{k=1}^s c_k v(Q_k) = \int \varphi dx.$$

Um die umgekehrte Abschätzung zu erhalten, betrachte einen abgeschlossenen Quader A , so dass $\varphi(x) = 0$ für $x \notin A$. Sei ferner $M := \max \varphi$. Dann ist die Treppenfunktion $\psi := M1_A - \varphi$ nicht negativ. Für ein nicht-negatives ψ gilt, wie wir gerade gesehen haben,

$$\|\psi\|_1 \leq \int \psi dx.$$

Damit folgt

$$\int \varphi dx = \int (M1_A - \psi) dx \leq \|\varphi + \psi\|_1 - \|\psi\|_1 \leq \|\varphi\|_1.$$

Im ersten Schritt ging die Definition von ψ ein; im zweiten Schritt Teil 1 und die Abschätzung für $\int \psi$. Der dritte Schritt ist die Dreieckungleichung 1.1.13.3 für die Halbnorm.

□

Lemma 1.2.2.

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine Funktion, und φ_k eine Folge von Treppenfunktionen, so dass

$$\|f - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Dann konvergiert die Folge $\int \varphi_k$ komplexer Zahlen gegen eine komplexe Zahl. Der Grenzwert einer solchen Folge hängt nicht von der Wahl der Folge von Treppenfunktionen ab.

Beweis.

Seien φ, ψ Treppenfunktionen. Dann gilt

$$\left| \int \varphi dx - \int \psi dx \right| \leq \int |\varphi - \psi| dx = \|\varphi - \psi\|_1 \leq \|\varphi - f\|_1 + \|\psi - f\|_1.$$

Hier haben wir erst Satz 1.1.8.2, dann Lemma 1.2.1.2 für Treppenfunktionen und schließlich die Dreiecksungleichung für die Halbnorm $\|\cdot\|_1$ benutzt. Daher ist die Folge $\int \varphi_k$ eine Cauchy-Folge komplexer Zahlen und konvergiert im vollständigen Körper \mathbb{C} . Aus der gleichen Ungleichung folgt auch die Unabhängigkeit von der Wahl der Folge von Treppenfunktionen. □

Definition 1.2.3

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt Lebesgue-integrierbar (kurz: integrierbar) über \mathbb{R}^n , wenn es eine Folge von Treppenfunktionen φ_k gibt mit

$$\|f - \varphi_k\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

In diesem Fall schreiben wir

$$\int f(x) d^n x \equiv \int f dx \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) dx \in \mathbb{C}$$

Wegen Lemma 1.2.2 ist dies wohldefiniert und das Integral eine (endliche) komplexe Zahl.

Bemerkung 1.2.4.

1. Jede Treppenfunktion φ ist Lebesgue-integrierbar: wähle zur Approximation die konstante Folge mit Gliedern φ .
2. Wir sagen auch kurz, dass dann $\varphi_k \rightarrow f$ bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_1$. Daraus folgt nicht notwendigerweise eine punktweise Konvergenz, aber wir werden sehen, dass *fast überall* punktweise Konvergenz gilt.

Satz 1.2.5.

Ist die Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ über den \mathbb{R}^n integrierbar, so ist auch die Funktion $|f|$ über den \mathbb{R}^n integrierbar und es gilt

$$\left| \int f dx \right| \leq \int |f| dx \quad \text{und} \quad \|f\|_1 = \int |f| dx.$$

Wir hatten die erste Aussage für Treppenfunktionen in 1.1.8.2 und die zweite in 1.2.1.2 gesehen.

Beweis.

1. Da f integrierbar sein soll, finde eine Folge (φ_k) von Treppenfunktionen mit $\|f - \varphi_k\|_1 \rightarrow 0$. Wegen der Dreiecksungleichung gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\left| |f(x)| - |\varphi_k(x)| \right| \leq |f(x) - \varphi_k(x)|$$

und somit wegen der Monotonie 1.1.13.2 der L^1 -Halbnorm

$$\left| \| |f| - |\varphi_k| \|_1 \right| \leq \|f - \varphi_k\|_1.$$

Die rechte Seite und somit auch die linke Seite gehen für $k \rightarrow \infty$ gegen 0. Da auch (φ_k) eine Folge von Treppenfunktionen ist, ist $|f|$ integrierbar und die Treppenfunktionen $|\varphi_k|$ approximieren $|f|$ bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_1$. Es folgt

$$\left| \int f dx \right| = \left| \lim_k \int \varphi_k dx \right| \leq \lim_k \int |\varphi_k| dx = \int |f| dx.$$

Die erste Gleichheit folgt aus der Definition des Integrals $\int f dx$, die Ungleichung ist 1.1.8.2 für Treppenfunktionen. Die letzte Gleichheit folgt, weil (φ_k) die Funktion $|f|$ bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_1$ approximiert.

2. Für die zweite Aussage betrachten wir die Ungleichungen, die aus der Dreiecksungleichung 1.1.13.3 für die $\|\cdot\|_1$ -Norm folgen:

$$(*) \quad \|\varphi_k\|_1 - \|f - \varphi_k\|_1 \leq \|f\|_1 \leq \|\varphi_k\|_1 + \|f - \varphi_k\|_1$$

Nun gilt

$$\|\varphi_k\|_1 \stackrel{1.2.1.2}{=} \int |\varphi_k| dx \rightarrow \int |f| dx$$

da die Folge von Treppenfunktionen $|\varphi_k|$ die Funktion $|f|$ L^1 -approximiert. Damit folgt aus der Ungleichung (*)

$$\int |f| dx \leq \|f\|_1 \leq \int |f| dx.$$

□

Korollar 1.2.6.

Es gelten die folgenden Rechenregeln: sind f, g integrierbar, so gilt

1. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $\alpha f + \beta g$ integrierbar und es gilt

$$\int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx.$$

2. Die Funktion \bar{f} ist integrierbar und es gilt

$$\int \bar{f} dx = \overline{\int f dx}.$$

3. Für reellwertige Funktionen f, g folgt aus $f \leq g$, dass $\int f dx \leq \int g dx$ (Monotonie des Lebesgue-Integrals).

4. Ist überdies die Funktion g aus 3. beschränkt, so ist auch die Funktion $f \cdot g$ integrierbar.

Beweis.

1. und 2. Sind (φ_k) und (ψ_k) L^1 -approximierende Folgen von Treppenfunktionen für f bzw. g , so ist $(\alpha\varphi_k + \beta\psi_k)$ eine L^1 -approximierende Folge für $\alpha f + \beta g$ und $(\overline{\varphi_k})$ eine L^1 -approximierende Folge für \bar{f} .

3. Nach Satz 1.2.5 ist wegen $g - f \geq 0$

$$\int (g - f) dx = \int |g - f| dx = \|g - f\|_1 \geq 0.$$

4. Sei M eine positive obere Schranke für $|g|$. Da f integrierbar ist, finde zu gegebenem $\epsilon > 0$ eine beschränkte Treppenfunktion φ mit

$$\|f - \varphi\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2M}$$

und eine Treppenfunktion ψ mit

$$\|g - \psi\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2\mu},$$

wobei μ eine positive obere Schranke der Treppenfunktion φ sei. Aus der für alle $x \in \mathbb{R}^n$ geltenden Abschätzung

$$|fg(x) - \varphi\psi(x)| \leq |(f - \varphi)(x)| \cdot |g(x)| + |\varphi(x)| \cdot |(g - \psi)(x)|$$

folgt dann wegen der Monotonie 1.1.13.2 der Halbnorm

$$\|fg - \varphi\psi\| \leq M \cdot \|f - \varphi\|_1 + \mu \|g - \psi\|_1 \leq M \frac{\epsilon}{2M} + \mu \frac{\epsilon}{2\mu} \leq \epsilon.$$

□

Korollar 1.2.7.

1. Eine komplexwertige Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist genau dann integrierbar, wenn ihr Real- und Imaginärteil integrierbar ist. In diesem Falle gilt

$$\int f dx = \int \operatorname{Re} f dx + i \int \operatorname{Im} f dx.$$

2. Seien die Funktionen $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ integrierbar. Dann sind auch die Funktionen $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ integrierbar. Insbesondere ist der *positive Anteil* $f^+ := \max(f, 0)$ und der *negative Anteil* $f^- := -\min(f, 0)$ integrierbar.

Beweis.

Der erste Teil folgt, weil Real- und Imaginärteil reelle Linearkombinationen sind. Wir zeigen nur den zweiten Teil der Aussage. Es gilt

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \text{ und } \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

Nach Voraussetzung sind f und g , nach Korollar 1.2.6 ihre Differenz und nach Satz 1.2.5 deren Absolutbetrag integrierbar. □

Wir wollen nicht nur Funktionen integrieren, die auf ganz \mathbb{R}^n definiert sind.

Definition 1.2.8

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und f eine Funktion mit Werten in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, deren Definitionsbereich A umfasst.

1. Eine Fortsetzung von f ist eine Funktion \tilde{f} , die auf dem Definitionsbereich $D(f)$ von f mit f übereinstimmt. Die triviale Fortsetzung von f auf A ist die folgende Funktion:

$$f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

(Die triviale Fortsetzung f_A ist also eigentlich nur eine Fortsetzung der Einschränkung von f auf A .)

2. Eine solche Funktion f heißt über die Teilmenge A integrierbar, genau dann, wenn die triviale Fortsetzung f_A über \mathbb{R}^n integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\int_A f dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_A dx$$

das Lebesgue-Integral von f über A . Wir setzen

$$\|f\|_{1,A} := \|f_A\|_1 \stackrel{1.2.5}{=} \int_A |f| dx.$$

3. Die Menge der über $A \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbaren komplexwertigen Funktionen bildet einen komplexen Vektorraum $\mathcal{L}^1(A)$ mit Halbnorm $\|\cdot\|_{1,A}$.

Man beachte, dass die Notation f_A zu der bereits eingeführten Bezeichnung der Funktion 1_A passt. Wir vergleichen mit dem bekannten Begriff der Riemann-integrierbaren Funktion auf kompakten Intervallen. Im allgemeinen Fall, insbesondere bei uneigentlichen Integralen, ist die Lage subtiler.

Satz 1.2.9.

Es sei $A = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein *kompaktes* Intervall und f eine über A Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist f über A Lebesgue-integrierbar und das Lebesgue-Integral und das Riemann-Integral sind gleich.

Beweis.

Übg. □

Der folgende Satz verschafft uns eine große Klasse integrierbarer Funktionen:

Satz 1.2.10 (Kleiner Satz von Beppo Levi).

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und sei (φ_k) eine monoton wachsende (oder fallende) Folge von Treppenfunktionen, so dass

- (i) (φ_k) punktweise gegen f konvergiert,
- (ii) die Folge $(\int \varphi_k dx)$ der Integrale der Treppenfunktionen beschränkt ist.

Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx$$

Beweis.

Wir betrachten eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen. Dann gilt in jedem Punkt

$$f - \varphi_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_{N+1} - \varphi_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^N (\varphi_{i+1} - \varphi_i) = \sum_{i=k}^{\infty} (\varphi_{i+1} - \varphi_i) \geq 0$$

Daraus folgt mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung 1.1.13.3

$$\|f - \varphi_k\|_1 \leq \sum_{i=k}^{\infty} \|\varphi_{i+1} - \varphi_i\|_1 \stackrel{\text{Lemma 1.2.1.2}}{=} \sum_{i=k}^{\infty} \int |\varphi_{i+1} - \varphi_i| dx$$

$$= \sum_{i=k}^{\infty} \left(\int \varphi_{i+1} dx - \int \varphi_i dx \right) = \mathcal{I} - \int \varphi_k dx,$$

denn es existiert $\mathcal{I} := \lim_{N \rightarrow \infty} \int \varphi_{N+1} dx$, da die Folge der Integrale monoton ist und beschränkt sein soll. Aus

$$\|f - \varphi_k\|_1 \leq \mathcal{I} - \int \varphi_k dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

folgt, dass f integrierbar ist. Nach Definition 1.2.3 des Integrals ist $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx$.
□

Wir behandeln nun die Integrierbarkeit *stetiger* Funktionen auf offenen oder kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^n . Damit stellen wir eine Verbindung zwischen dem Lebesgue-Integral und der Topologie des \mathbb{R}^n her.

Lemma 1.2.11.

Sei K eine kompakte Teilmenge und U eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n mit $K \subseteq U$. Sei $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige positive Funktion. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es dann Treppenfunktionen $\psi, \psi' \geq 0$ mit

1. $f(x) \leq \psi(x) \leq f(x) + \epsilon$ für alle $x \in K$.
2. $f(x) - \epsilon \leq \psi'(x) \leq f(x)$ für alle $x \in K$.
3. $\psi(x) = \psi'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$.

Beweis.

Auf dem Kompaktum K ist f gleichmäßig stetig. Finde daher ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$ für alle $x, x' \in K$ mit $\|x - x'\|_{\max} \leq \delta$. Überdecke K durch endlich viele abgeschlossene Würfel W_1, \dots, W_s der Kantenlänge kleiner als δ , die alle in U liegen. Sei M_i das Maximum und m_i das Minimum der stetigen Funktion f auf dem abgeschlossenen Würfel W_i . Dann setze

$$\psi := \max(M_1 \cdot 1_{W_1}, \dots, M_s \cdot 1_{W_s}) \text{ und } \psi' := \min(m_1 \cdot 1_{W_1}, \dots, m_s \cdot 1_{W_s})$$

□

Lemma 1.2.12.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige nicht-negative Funktion. Dann gilt

1. Ist A offen, dann existiert eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen $\varphi_k \geq 0$, die gegen f punktweise konvergiert, $\varphi_k \nearrow f$.
2. Ist A kompakt, dann existiert eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen $\varphi_k \geq 0$ mit $\varphi_k \searrow f$ punktweise.

Beweis.

1. Sei A offen. Wir wählen kompakte Mengen A_k mit $\cup_{k=1}^{\infty} A_k = A$. Finde nach Lemma 1.2.11 Treppenfunktionen ψ_ℓ für A_ℓ , die außerhalb A verschwinden und für die gilt

$$f(x) - \frac{1}{2^\ell} \leq \psi_\ell(x) \leq f(x)$$

und $\psi_\ell(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Dann leistet die Folge (φ_k) mit $\varphi_k := \max(\psi_1, \dots, \psi_k)$ das Gewünschte.

2. Sei A kompakt. Finde offene Mengen U_k mit $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = A$ und mit dem gleichen Hilfssatz 1.2.11 Treppenfunktionen ψ_ℓ mit

$$f(x) \leq \psi_\ell(x) \leq f(x) + 2^{-\ell} \text{ für } x \in A \text{ und } \psi_\ell(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \setminus U_k.$$

Dann leistet die Folge (φ_k) mit $\varphi_k := \min(\psi_1, \dots, \psi_k)$ das Gewünschte.

□

Satz 1.2.13.

1. Jede beschränkte stetige Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer beschränkten offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist über diese integrierbar.
2. Jede stetige Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist über diese integrierbar.

Beweis.

Wir beschränken uns auf reellwertige nicht-negative Funktionen, $f \geq 0$. Für komplexwertige Funktionen betrachte die Zerlegung in Real- und Imaginärteil und zerlege diese in ihren positiven und negativen Anteil.

1. Sei U beschränkt und offen. Nach Lemma 1.2.12 ist f die Grenzfunktion einer monoton wachsenden Folge von Treppenfunktionen $\varphi_k \geq 0$. Um die Beschränktheit der Folge $\int \varphi_k$ der Integrale zu sehen, wähle eine obere Schranke M für die beschränkte Funktion f und einen Quader Q mit $U \subseteq Q$. Für die Treppenfunktionen gilt also

$$\varphi_k(x) \leq f(x) \leq M \text{ für alle } x \in U \text{ und für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Daher ist

$$\int \varphi_k dx \leq M \cdot v(Q).$$

Also folgt aus dem kleinen Satz 1.2.10 von Beppo Levi, dass f integrierbar ist.

2. Die zweite Aussage für kompaktes A wird analog mit einer Folge monoton fallender nicht-negativer Treppenfunktionen aus Lemma 1.2.12 bewiesen.

□

Sei $X = \mathbb{R}^p$ und $Y = \mathbb{R}^q$. Wir wollen über eine Teilmenge $A \subseteq X \times Y \cong \mathbb{R}^{p+q}$ eine stetige beschränkte Funktion f integrieren. Wir bezeichnen für festes $y \in Y$ die "Schnittmenge" von A zu $y \in Y$ mit $A_y := \{x \in X \mid (x, y) \in A\} \subseteq X$. Ein Reduktionsverfahren zur Berechnung des Integrals von f in dieser Situation liefert der folgende wichtige Satz.

Satz 1.2.14 (Kleiner Satz von Fubini).

Es sei $A \subseteq X \times Y$ entweder kompakt oder offen und beschränkt. Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte stetige Funktion. Dann gilt:

1. Für alle $y \in Y$ mit $A_y \neq \emptyset$ ist die Funktion $f_y: x \mapsto f(x, y)$ über A_y integrierbar.

2. Betrachte daher die Funktion $F: Y \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$F(y) := \begin{cases} \int_{A_y} f_y(x) dx & \text{für } A_y \neq \emptyset, \\ 0 & \text{für } A_y = \emptyset. \end{cases}$$

Sie ist über Y integrierbar und es gilt

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_Y F(y) dy =: \int_Y \left(\int_{A_y} f(x, y) dx \right) dy.$$

Es gilt ebenso

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_X \left(\int_{A_x} f(x, y) dy \right) dx \text{ mit } A_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in A\}.$$

Beweis.

Wieder reicht es, die Aussage für den Fall einer nicht-negativen Funktion, $f \geq 0$, zu zeigen. Wir bringen auch nur den Beweis für offenes und beschränktes A ; der Fall A kompakt wird analog behandelt.

Sei (φ_k) eine gegen f_A konvergente, monoton wachsende Folge von Treppenfunktion auf $X \times Y$, deren Existenz wegen der Stetigkeit von f_A durch Lemma 1.2.12.1 garantiert ist. Für jedes feste $y \in Y$ bilden die Funktionen

$$x \mapsto \varphi_k(x, y)$$

eine gegen die Funktion

$$x \mapsto f_A(x, y)$$

punktweise konvergente, monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen auf X . Man zeigt wie im Beweis von Satz 1.2.13, dass die Folge der Integrale $\int_X \varphi_k(x, y) dx$ beschränkt ist. Nach dem kleinen Satz von Beppo Levi 1.2.10 gilt

$$F(y) = \lim_k \int_X \varphi_k(x, y) dx.$$

Die Funktionen

$$y \mapsto \Phi_k(y) := \int_X \varphi_k(x, y) dx$$

sind Treppenfunktionen auf Y und die Folge (Φ_k) konvergiert monoton wachsend gegen F . Mit dem Satz von Fubini für Treppenfunktionen 1.1.9 erhält man wegen $\varphi_k \leq f_A$

$$\int_Y \Phi_k(y) dy \stackrel{1.1.9}{=} \int_{X \times Y} \varphi_k(x, y) d(x, y) \leq \int_{X \times Y} f_A(x, y) d(x, y);$$

also ist die Folge der Integrale $\int_Y \Phi_k(y) dy$ beschränkt. Wiederum nach dem kleinen Satz von Beppo Levi 1.2.10 ist F integrierbar. Es gilt

$$\int_Y F(y) dy = \lim_k \int_Y \Phi_k(y) dy = \lim_k \int_{X \times Y} \varphi_k(x, y) d(x, y) = \int_{X \times Y} f_A(x, y) d(x, y).$$

□

Beispiel 1.2.15.

1. Sei f wie oben, und sei jetzt $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $y \in Y$ die Menge A_y entweder leer oder ein Intervall ist, $A_y = [x_1(y), x_2(y)]$. Dann gilt

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_B \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy \text{ mit } B := \{y \in Y \mid A_y \neq \emptyset\}.$$

Speziell für den Fall eines Rechtecks im \mathbb{R}^2 mit $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ finden wir:

$$\int_A f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

2. Betrachte eine kompakte Kreisscheibe, $K = \overline{B_r}(0)$. Wir rechnen:

$$v_2(K) := \int_K 1 d(x, y) = \int_{-r}^r \left(\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} 1 dx \right) dy = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2-y^2} dy \stackrel{\text{ÜA}}{=} \pi r^2.$$

1.3 Messbarkeit, Nullmengen

Wir folgen [K, §7.5-6]. Das Lebesgue-Integral liefert einen allgemeinen translationsinvarianten und normierten Volumenbegriff, das Lebesgue-Maß. Da Maße eine große Rolle spielen, wollen wir uns zunächst etwas allgemeiner mit ihnen beschäftigen.

Definition 1.3.1

Eine Menge \mathcal{A} von Teilmengen einer Grundmenge Ω heißt σ -Algebra, wenn gilt

1. Die Grundmenge Ω ist im Mengensystem \mathcal{A} enthalten, $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Mit jeder Menge $A \in \mathcal{A}$ ist auch ihr Komplement $\Omega \setminus A$ im Mengensystem \mathcal{A} , i.e. $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.
3. Abzählbare Vereinigungen von Mengen $A_i \in \mathcal{A}$ sind wieder in \mathcal{A} : es gilt $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Bemerkungen 1.3.2.

1. Aus den Bedingungen 1. und 2. folgt, dass eine σ -Algebra \mathcal{A} immer das Komplement von Ω , also die leere Menge \emptyset enthält.
2. Aufgrund der Eigenschaft 2. kann man in Eigenschaft 1. alternativ zu $\Omega \in \mathcal{A}$ auch $\emptyset \in \mathcal{A}$ fordern.
3. Wählt man in Bedingung 3 die Mengen $A_m = \emptyset$ für alle $m > n$, so folgt, dass die endliche Vereinigungsmenge $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ in \mathcal{A} enthalten ist.
4. Nach den de Morgan'schen Gesetzen folgt, dass \mathcal{A} auch abgeschlossen unter abzählbaren und endlichen Durchschnitten ist.

Beispiel 1.3.3.

1. Für jede beliebige Menge Ω ist $\{\emptyset, \Omega\}$ die kleinste und die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ die größte mögliche σ -Algebra mit Ω als Grundmenge.
2. Es seien Ω und Ω' zwei beliebige Mengen, \mathcal{A}' eine σ -Algebra in Ω' und $T: \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung. Dann ist $T^{-1}(\mathcal{A}') := \{T^{-1}(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\}$ eine σ -Algebra in Ω .

Definition 1.3.4

1. Es sei \mathcal{A} eine σ -Algebra über einer nicht-leeren Grundmenge Ω . Eine Funktion $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ heißt ein Maß auf \mathcal{A} , wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) σ -Additivität: Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen aus \mathcal{A} gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Für $A \in \mathcal{A}$ heißt die reelle Zahl $\mu(A)$ das Maß der Menge A .

2. Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ wird Maßraum genannt. Das Paar (Ω, \mathcal{A}) bestehend aus der Grundmenge und der darauf definierten σ -Algebra heißt messbarer Raum. Die Teilmengen $A \in \mathcal{A}$ heißen messbar.

3. Das Maß μ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß (oder normiertes Maß), wenn zusätzlich $\mu(\Omega) = 1$ gilt. Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß μ heißt Wahrscheinlichkeitsraum. Die Grundmenge Ω heißt Ergebnisraum und enthält als Elemente die möglichen Ergebnisse, die ein Wahrscheinlichkeitsexperiment liefern kann. Die σ -Algebra \mathcal{A} enthält die Ereignisse, denen eine Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 zugeordnet werden kann. In dieser Anwendung nennt man auch $\Omega \in \mathcal{A}$ das sichere Ereignis und $\emptyset \in \mathcal{A}$ das unmögliche Ereignis.

Beispiel 1.3.5.

1. N -facher Münzwurf. Setze $M := \{0, 1\}$. Der Ergebnisraum ist das N -fache kartesische Produkt $\Omega := M^{\times N}$; der Ereignisraum ist die σ -Algebra, die durch die Potenzmenge gegeben ist. Das Wahrscheinlichkeitsmaß ist $\mu(A) = |A|/2^N$.

2. Eine wichtige Verallgemeinerung auf Wahrscheinlichkeitsräume mit endlichem Ergebnisraum Ω sind Gleichverteilungen. Hier ist die σ -Algebra der Ereignisse $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und das Wahrscheinlichkeitsmaß ist $\mu(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ für $A \subseteq \Omega$.

Definition 1.3.6

Sei Ω ein metrischer Raum oder allgemeiner ein topologischer Raum (die offenen Mengen sind festgelegt, vgl. MFP2: offene und abgeschlossene Mengen). Dann ist die Borel-Algebra definiert als die kleinste σ -Algebra, die die offenen Teilmengen von Ω enthält. (Sie enthält dann auch als Komplemente alle abgeschlossenen Teilmengen.)

Für den späteren Gebrauch definieren wir noch:

Definition 1.3.7

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt σ -kompakt, wenn sie eine Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen ist.

Bemerkungen 1.3.8.

Beispiele σ -kompakter Mengen sind alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen des \mathbb{R}^n . Es sind Durchschnitte und Vereinigungen abzählbar vieler σ -kompakter Mengen wieder σ -kompakt. Speziell ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ eine σ -kompakte Menge, jedoch ist $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nicht σ -kompakt (das wollen wir im Rahmen der Vorlesung nicht zeigen).

Die Borel-Algebra von \mathbb{R} enthält unter anderem alle Intervalle und auch die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Wir möchten (mindestens) für die Borelschen Teilmengen von \mathbb{R}^n ein Maß definieren. Wir sprechen in der nächsten Definition vom Lebesgue-Maß, können die für ein Maß geforderten Eigenschaften, z.B. die σ -Additivität, im Moment aber noch nicht zeigen.

Definition 1.3.9

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (Lebesgue-)messbar (im Sinne von: messbar mit endlichem Maß), falls die konstante Funktion 1 über A integrierbar ist. In dem Fall ist das Lebesgue-Maß von A , auch das n -dimensionale Volumen von A genannt (im Fall $n = 2$ spricht man auch vom Flächeninhalt von A), gegeben durch

$$v(A) := v_n(A) := \int_A 1 \, dx.$$

Man setzt $v(\emptyset) = 0$.

Beispiel 1.3.10.

1. Nach Satz 1.2.13 sind offene beschränkte Teilmengen des \mathbb{R}^n und kompakte Teilmengen des \mathbb{R}^n messbar.
2. Sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Dann ist die Menge

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq g(x)\}$$

der Punkte unter dem Graphen von g kompakt und somit nach Satz 1.2.14 messbar. Nach Beispiel 1.2.15 gilt

$$v_2(A) = \int_{[a,b]} \left(\int_0^{g(x)} 1 \, dy \right) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

3. Vereinigungen $A = Q_1 \cup \dots \cup Q_s$ endlich vieler Quader $Q_i \subseteq \mathbb{R}^n$ sind messbar. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die Quader disjunkt sind. Wir nennen eine solche Teilmenge des \mathbb{R}^n ab jetzt eine *Figur*.

Lemma 1.3.11.

1. Eine *Ausschöpfung* einer Menge A ist eine aufsteigende Folge $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ von Teilmengen $A_k \subseteq A$ mit $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_k$.

Jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ hat eine *Ausschöpfung* (A_k) durch Figuren.

Die offene Teilmenge U ist genau dann messbar, wenn die Folge $v(A_k)$ der Volumina der Figuren beschränkt ist. In dem Fall gilt

$$v(U) = \lim_{k \rightarrow \infty} v(A_k) = \sup v(A_k).$$

2. Analog gilt: für jedes Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert eine absteigende Folge $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ von Figuren, so dass $K = \cap A_k$. Mit jeder solchen Folge gilt

$$v(K) = \lim_{k \rightarrow \infty} v(A_k) = \inf v(A_k).$$

Beweis.

1. Betrachte die in U enthaltenen Quader mit rationalen Mittelpunktskoordinaten und rationalen Kantenlängen. Dies ist eine abzählbare Menge; wähle eine Abzählung Q_1, Q_2, \dots . Offenbar ist ihre Vereinigung $\cup_{i=1}^{\infty} Q_i = U$. Dann bilden die Figuren $A_k := Q_1 \cup \dots \cup Q_k$ eine Ausschöpfung von U . Die Folge der charakteristischen Funktionen 1_{A_i} ist dann monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen die charakteristische Funktion 1_U .

Wir nehmen erst an, die offene Menge U sei messbar. Dann folgt aus $1_{A_k} \leq 1_U$, dass

$$v(A_k) \stackrel{1.2.1}{=} \int 1_{A_k} \leq \int 1_U \stackrel{\text{def}}{=} v(U) < \infty.$$

Also ist die Folge $(v(A_k))$ beschränkt und konvergiert als monoton wachsende Folge.

Ist umgekehrt die Folge $(v(A_k))$ beschränkt, so ist die Folge der Integrale $(\int 1_{A_k} dx)$ von Treppenfunktionen beschränkt. Nach dem kleinen Satz 1.2.10 von Beppo Levi folgt

$$v(U) \stackrel{\text{def}}{=} \int 1_U dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int 1_{A_k} dx}_{v(A_k)}.$$

2. Man wähle einen offenen Würfel $W \supset K$ und eine Folge (B_k) von Figuren, die die offene Menge $W \setminus K$ ausschöpft. Die Komplemente $A_k := W \setminus B_k$ sind Figuren mit der gewünschten Eigenschaft.

□

Beispiel 1.3.12. Wir definieren iterativ die *Cantormenge* wie folgt als Durchschnitt $A = \bigcap A_k$: Aus dem Einheitsintervall $A_0 := [0, 1]$ entfernt man das mittlere Drittel, um zwei abgeschlossene Intervalle der Länge $1/3$ zu erhalten. Aus jedem dieser Intervalle entfernt man jeweils wieder das mittlere Drittel und erhält so 4 Intervalle der Länge $1/9$. So fährt man fort, und für A_n erhält man 2^n Intervalle der Länge $1/3^n$. Es ist A abgeschlossen und beschränkt, also kompakt und somit nach Satz 1.3.10.1 meßbar. Man erhält

$$v_1(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(A_n) = 0.$$

Durch eine ähnliche Konstruktion (für A_n entfernt man 2^{n-1} Intervalle der Länge $\frac{1}{2^{2n}}$) kann man auch eine kompakte Menge A mit (Lebesgue-)Maß $\frac{1}{2}$ konstruieren, die kein Intervall positiver Länge enthält.

Bemerkungen 1.3.13.

1. Für jedes Maß gilt: Sind $A, B \in \mathcal{A}$, so folgt aus der disjunkten Zerlegung $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ wegen der σ -Additivität, dass $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.
2. Im Falle des Lebesgue-Maßes ergibt sich dies auch, indem man die Beziehung $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$ integriert. (Für den Durchschnitt gilt $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$.)
3. Jedes Maß ist monoton: Aus $A \subseteq B$ folgt wegen der disjunkten Zerlegung $B = A \cup (B \setminus A)$, dass

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

4. Für das Lebesgue-Maß folgt dies auch aus der Ungleichung $1_A \leq 1_B$ für $A \subseteq B$ wegen der Monotonie des Integrals.
5. Allgemeiner gilt: Ist f integrierbar über A und B eine messbare Menge, so ist f auch über $A \cap B$ integrierbar. Es gilt

$$\left| \int_{A \cap B} f \right| \leq \int_A |f|.$$

Denn f_A und 1_B sind integrierbar und 1_B ist beschränkt, so dass nach Korollar 1.2.6.4 auch die Funktion $f_{A \cap B} = f_A \cdot 1_B$ integrierbar ist.

Bemerkung 1.3.14 (Berechnung von Volumina).

1. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Bezeichne wieder für $y \in \mathbb{R}^q$ die Schnittmenge mit A_y . Dann liefert der kleine Satz von Fubini 1.2.14 für die charakteristische Funktion 1_A

$$v_{p+q}(A) = \int_{\mathbb{R}^q} v_p(A_y) dy$$

2. Daraus folgt das *Cavalierische Prinzip*: zwei messbare Mengen A, B haben das gleiche Volumen, wenn ihre Schnitmengen A_y und B_y für alle $y \in \mathbb{R}^q$ das gleiche Volumen haben, $v_p(A_y) = v_p(B_y)$.

Beispiel 1.3.15.

1. Zylinder

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine kompakte oder beschränkte offene Menge. Dann heißt die Menge

$$A = B \times [0, h] \subseteq \mathbb{R}^n$$

der *Zylinder* mit Basis B und Höhe h . Alle Schnitmengen haben $v_{n-1}(A_y) = v_{n-1}(B)$, daher ist

$$v_n(A) = \int_0^h v_{n-1}(B) dy = h \cdot v_{n-1}(B).$$

2. Volumen von (allgemeinen) Kegeln:

Sei wieder $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine kompakte oder beschränkte offene Menge. Dann heißt

$$K(B, h) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid y \in [0, h], x \in \left(1 - \frac{y}{h}\right) B\}$$

der *Kegel* mit Basis B und Höhe h . Für $y \in [0, h]$ ist die Schnittmenge

$$A_y = \left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot B = \left\{\left(1 - \frac{y}{h}\right) \cdot b \mid b \in B\right\},$$

ÜA: Es gilt nun allgemein für beliebige Skalierungsfaktoren $s_1, \dots, s_n \in (0, \infty)$ und eine beliebige integrierbare Funktion f

$$\int f(s_1 x_1, \dots, s_n x_n) dx = s_1^{-1} \cdots s_n^{-1} \int f(x) dx.$$

Daher hat A_y das $(n-1)$ -dimensionale Volumen $\left(1 - \frac{y}{h}\right)^{n-1} v_{n-1}(B)$ und wir finden

$$v_n(K) = \int_0^h v_{n-1}(B) \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{n-1} dy = \frac{h}{n} v_{n-1}(B).$$

3. Ein wichtiger Spezialfall ist der *Standardsimplex*:

$$\Delta^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}.$$

Wir finden $v_n(\Delta^1) = v([0, 1]) = 1$ und induktiv mit der Formel aus Beispiel 2.

$$v_n(\Delta^n) = \frac{1}{n} v(\Delta_{n-1}) = \frac{1}{n!}.$$

4. Volumen einer (Halb-)Kugel nach Archimedes

Wir benutzen das Cavalierische Prinzip: eine Halbkugel vom Radius r hat das gleiche Volumen wie ein Kreiszyylinder vom Radius r und Höhe r mit ausgeschnittenem (auf die Spitze gestellten) Kegel, denn die Schnittmengen A_y und B_y sind Kreisringe bzw. Kreisscheiben mit Flächeninhalt $\pi(r^2 - y^2)$. Damit ist das Volumen der Halbkugel

$$v = v(\text{Kreiszyylinder}) - v(\text{Kegel}) = r^3\pi - \frac{r}{3}r^2\pi = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Definition 1.3.16

Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (Lebesgue)Nullmenge, wenn sie eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

1. N ist messbar mit $v_n(N) = 0$.
2. Für die charakteristische Funktion gilt $\|\mathbf{1}_N\|_1 = 0$.

Beweis.

Zum Beweis der Äquivalenz bemerken wir: Es folgt 2. aus 1. da

$$\|\mathbf{1}_N\|_1 \stackrel{\text{messbar}}{=} \int \mathbf{1}_N dx \stackrel{\text{def}}{=} v_n(N) = 0.$$

Für die umgekehrte Richtung betrachte die konstante Folge von Treppenfunktionen mit der konstanten Funktion Null, $\varphi_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sie approximiert die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_N$ bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_1$, denn es gilt

$$\|\mathbf{1}_N - \varphi_k\|_1 = \|\mathbf{1}_N\|_1 = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Also ist die charakteristische Funktion $\mathbf{1}_N$ integrierbar und somit die Menge N messbar. Es gilt

$$v(N) \stackrel{1.3.9}{=} \int \mathbf{1}_N dx \stackrel{1.2.3}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k dx = 0,$$

wobei wir erst die Definition des Volumens und dann die Definition des Integrals verwendet haben. □

Bemerkungen 1.3.17.

1. Jede Teilmenge $A \subseteq N$ einer Nullmenge N ist Nullmenge, denn aus $0 \leq \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_N$ folgt wegen der Monotonie 1.1.13.2 der Halbnorm $\|\mathbf{1}_A\|_1 \leq \|\mathbf{1}_N\|_1 = 0$.

2. Die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist eine Nullmenge. Denn aus $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ mit Nullmengen N_k folgt mit der verallgemeinerten Dreiecksungleichung 1.1.13.3

$$\|1_N\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|1_{N_k}\|_1 = 0.$$

Insbesondere ist jede abzählbare Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ mit ausgearteten Quadraten Q_k eine Nullmenge. Jede abzählbare Teilmenge des \mathbb{R}^n ist daher eine Nullmenge. Insbesondere ist $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullmenge. Das Beispiel der Cantormenge mit Lebesgue-Maß Null zeigt, dass es aber auch Nullmengen mit der gleichen Mächtigkeit wie der der reellen Zahlen gibt.

3. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine abgeschlossene oder offene Menge und $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist der Graph Γ von g eine Nullmenge.

Denn schreibe A als abzählbare Vereinigung kompakter Mengen: eine abgeschlossene Menge können wir als abzählbare Vereinigung der Schnitte $A \cap B_n(0)$, wobei $n \in \mathbb{N}$, mit abgeschlossenen Kugeln schreiben. Im Fall einer offenen Menge betrachten wir abgeschlossene Kugeln um Punkte in U mit rationalen Koordinaten.

Wir können also A als kompakt annehmen. Dann ist der Graph als Bild der stetigen Abbildung

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ a &\mapsto (a, g(a)) \end{aligned}$$

kompakt. Es folgt nach dem kleinen Satz von Fubini 1.2.14

$$v(\Gamma) = \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\Gamma} dy \right) d^{n-1}x = \int_A \underbrace{\left(\int_{g(x)}^{g(x)} 1 dy \right)}_{=0} d^{n-1}x = 0$$

4. Damit ist auch jede Hyperebene als Graph einer affinen Funktion eine Nullmenge. Jeder kompakte Teil einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $k < n$ ist eine Nullmenge, da jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die sich als Graph einer Funktion schreiben lässt.

Definition 1.3.18 [”fast überall”, ”fast alle”]

Sei E eine Eigenschaft, so dass für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ erklärt ist, ob x diese Eigenschaft hat oder nicht. Wir sagen, dass E fast überall gilt oder dass fast alle Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ die Eigenschaft haben, wenn die Menge aller Punkte, für die E nicht gilt, eine Nullmenge ist.

Bemerkungen 1.3.19 (Beispiele für solche Eigenschaften).

1. Gegeben eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ist E in x die Eigenschaft, dass f in x einen endlichen Wert annimmt.
2. Gegeben zwei Funktionen $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, so ist die Eigenschaft E in x , dass $f(x) = g(x)$ gilt.

Satz 1.3.20.

Jede Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit $\|f\|_1 < \infty$ ist fast überall endlich.

Beweis.

Wir müssen zeigen, dass $N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \infty\}$ eine Nullmenge ist. Dafür beachte, dass für jedes $\epsilon > 0$ gilt $\mathbf{1}_N(x) \leq \epsilon |f(x)|$. Denn ist $x \in N$, so ist $1 \leq \epsilon |f(x)| = \infty$; ist $x \notin N$, so ist $0 \leq \epsilon |f(x)|$. Damit ist aber wegen der Monotonie der Halbnorm $\|\cdot\|_1$

$$v(N) = \|\mathbf{1}_N\|_1 \leq \epsilon \|f\|_1 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0,$$

weil $\|f\|_1$ nach Voraussetzung endlich ist. □

Satz 1.3.21 (Modifikationssatz).

Seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zwei Funktionen, die fast überall gleich sind. Dann ist mit f auch g integrierbar und es gilt $\int f = \int g$.

Beweis.

Für den Beweis betrachtet man $N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq g(x)\}$ und benutzt in einer Abschätzung für die Approximierbarkeit durch Treppenfunktionen die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_N$. □

Bemerkungen 1.3.22.

1. Zu jeder integrierbaren Funktion f auf \mathbb{R}^n existiert eine Funktion \tilde{f} , die fast überall mit f übereinstimmt und nur Werte $\neq \infty$ annimmt. Dazu setze

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } f(x) \neq \infty, \\ 0 & \text{für } f(x) = \infty. \end{cases}$$

2. Man kann sogar mit fast überall definierten Funktionen arbeiten: sei N eine Nullmenge und $f: \mathbb{R}^n \setminus N \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Man sagt dann, f sei über \mathbb{R}^n integrierbar, wenn irgendeine Fortsetzung $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ von f über \mathbb{R}^n im Sinne der ursprünglichen Definition integrierbar ist.
3. Für $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gilt: $\|f\|_1 = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ fast überall gilt. Denn verschwindet f außerhalb einer Nullmenge, so ersetze f durch die konstante Funktion 0 und wende den Modifikationssatz 1.3.21

$$\|f\|_1 = \int |f| dx \stackrel{1.3.21}{=} \int 0 dx = 0$$

an. Sei umgekehrt $\|f\|_1 = 0$. Schreibe dann

$$N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$$

als Vereinigung der abzählbar vielen Mengen

$$N_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| \geq 1/k\}.$$

Nun gilt $\mathbf{1}_{N_k} \leq k|f|$ und daher

$$v(N_k) = \|\mathbf{1}_{N_k}\|_1 \leq k\|f\|_1 = 0;$$

also sind alle Mengen N_k Nullmengen. Somit ist N als abzählbare Vereinigung von Nullmengen nach Bemerkung 1.3.17.2 wieder eine Nullmenge.

4. Demnach ist $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) := \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \text{ integrierbar}\}$ mit $\|\cdot\|_1$ kein normierter Vektorraum. Stattdessen ist der Quotientenvektorraum

$$L^1(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N} \text{ mit } \mathcal{N} := \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} | f = 0 \text{ fast überall}\}$$

ein normierter Vektorraum mit Norm: $\|f + \mathcal{N}\|_{L^1} := \|f\|_1$. Hierbei folgt die Wohldefiniertheit der Norm aus dem Modifikationssatz 1.3.21 und die Normeigenschaft aus 2.

Es gilt $f_k \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ für Funktionen $f_k, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, genau dann wenn $\|f - f_k\|_1 \rightarrow 0$. f heißt L^1 -Grenzwert und ist als Funktion nur bis auf ein Element von \mathcal{N} bestimmt.

Wir wollen noch abschließend Nullmengen charakterisieren. Zunächst benötigen wir zwei Sachverhalte, die wir hier nicht beweisen möchten; siehe [K], §7.6:

Lemma 1.3.23.

1. Ist $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine messbare offene Menge U mit $N \subseteq U$ und $v(U) < \epsilon$.
2. Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Vereinigung abzählbar vieler kompakter Würfel W_1, W_2, \dots , die höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Ist U messbar, so gilt außerdem:

$$v(U) = \sum_{i=1}^{\infty} v(W_i).$$

Satz 1.3.24 (Geometrische Charakterisierung von Nullmengen).

Eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Nullmenge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ abzählbar viele Quader Q_1, Q_2, \dots gibt, so dass

$$N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \epsilon.$$

Beweis.

- Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ solche Quader gibt. Aus $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ folgt $\mathbf{1}_N \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{Q_k}$. Hieraus folgt

$$\|\mathbf{1}_N\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbf{1}_{Q_k}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \epsilon$$

für alle $\epsilon > 0$ und somit $\|\mathbf{1}_N\|_1 = 0$. Damit ist N nach Definition eine Nullmenge.

- Für eine Nullmenge finden wir zu gegebenem $\epsilon > 0$ mit Hilfe von Lemma 1.3.23.1 zunächst eine offene Menge U mit $N \subseteq U$ und $v(U) < \epsilon$. Für U finden wir dann mit Hilfe von Lemma 1.3.23.2 eine Überdeckung mit Würfeln.

□

Korollar 1.3.25.

Sei K kompakt und $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt. Es existiere eine Nullmenge $N \subseteq K$ mit der Eigenschaft, dass die Einschränkung $f|_{K \setminus N}$ auf das Komplement von N stetig ist. Dann ist f über K integrierbar.

Beweis.

Sei M eine obere Schranke für f auf K . Sei $\epsilon > 0$. Nach Lemma 1.3.23.1 gibt es eine offene Menge U mit $N \subseteq U$ und $v(U) \leq \frac{\epsilon}{M}$. Die Einschränkung von f auf $K \setminus U$ ist nach Voraussetzung stetig, also integrierbar. Wähle eine Treppenfunktion φ mit $\|f_{K \setminus U} - \varphi\|_1 \leq \epsilon$.

Ferner ist $\|f_U\|_1 \leq Mv(U) < \epsilon$. Somit folgt

$$\|f_K - \varphi\|_1 \leq \|f_{K \setminus U} - \varphi\|_1 + \|f_U\|_1 < 2\epsilon.$$

Also ist f integrierbar. □

Das Lebesgue-Integral hat die wichtige Eigenschaft der Translationsinvarianz:

Satz 1.3.26.

Sei f eine integrierbare Funktion auf \mathbb{R}^n und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist auch die durch $f_a(x) := f(x - a)$ definierte Funktion integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_a dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

Beweis.

Das Volumen von Quadern ist translationsinvariant, $v(Q + a) = v(Q)$. Damit gilt die Behauptung für Treppenfunktionen und somit für Hüllreihen. Damit ist $\|g_a\|_1 = \|g\|_1$ für jede Funktion g . Wenn die Folge (φ_k) von Treppenfunktionen die Funktion f L^1 -approximiert, so approximiert die Folge $(\varphi_{a,k})$ von verschobenen Treppenfunktionen f_a . Also ist f_a integrierbar mit Integral

$$\int f_a dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_{k,a} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k dx \stackrel{\text{def}}{=} \int f dx.$$

□

Korollar 1.3.27.

Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, so ist auch die Menge $a + A$ messbar, und es gilt $v(a + A) = v(A)$.

Beweis.

Es gilt

$$v(a + A) \stackrel{\text{def}}{=} \int 1_{a+A} = \int (1_A)_a \stackrel{1.3.26}{=} \int 1_A \stackrel{\text{def}}{=} v(A).$$

□

Bemerkungen 1.3.28.

1. Man kann zeigen, dass das Lebesgue-Maß das *eindeutige* translationsinvariante Maß auf \mathbb{R}^n ist, für das der Einheitswürfel Volumen 1 hat.
2. Es gibt kein *translationsinvariantes* normiertes Maß auf \mathbb{R} mit $\mu([0, 1]) = 1$, das für alle (beschränkten) Teilmengen von \mathbb{R} definiert ist.

Dazu wähle ein Repräsentantensystem $A \subseteq [0, 1]$ des Quotienten \mathbb{R}/\mathbb{Q} . Dann ist \mathbb{R} eine abzählbare disjunkte Vereinigung

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} q + A.$$

Würde $\mu(A) = 0$ gelten, so wäre $\mu(\mathbb{R}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu(A) = 0$. Wir nehmen also $\mu(A) > 0$ an. Dann ist

$$\mu\left(\bigcup_{p \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} p + A\right)$$

als Maß einer disjunkten Vereinigung unendlich vieler Mengen des gleichen endlichen positiven Volumens unendlich. Andererseits ist $\bigcup_{p \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} (p + A) \subseteq [0, 2]$ und muss wegen der Monotonie des Maßes einen Inhalt kleiner als 2 haben.

Man beachte, dass in diesem Beweis bei der Konstruktion der Menge A das Auswahlaxiom eingeht. Nicht-messbare Funktionen kann man nur über das Auswahlaxiom konstruieren.

1.4 Vollständigkeit von $L^1(\mathbb{R}^n)$, Konvergenzsätze

Wir folgen weiter [K, 8.1-8.3].

Definition 1.4.1

1. Eine Folge von Funktionen $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt L^1 -konvergent gegen eine Funktion f und diese heißt ein L^1 -Grenzwert der Folge (f_k) , wenn

$$\|f_k - f\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

2. Eine Folge von Funktionen $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt L^1 -Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\|f_k - f_l\|_1 < \epsilon \text{ für alle } k, l \geq N.$$

Bemerkungen 1.4.2.

1. Der L^1 -Grenzwert ist nicht eindeutig. Sind aber f und \tilde{f} beide L^1 -Grenzwerte, so gilt wegen der Dreiecksungleichung $\|f - \tilde{f}\|_1 = 0$. Also unterscheiden sich f und \tilde{f} nur auf einer Nullmenge. Auch die Umkehrung dieser Aussage gilt.
2. Grenzwertbildung ist mit Summen und skalaren Vielfachen verträglich.
3. Wie für Zahlenfolgen zeigt man mit Hilfe der Dreiecksungleichung, dass L^1 -konvergente Folgen auch L^1 -Cauchy-Folgen sind.

Theorem 1.4.3 (Riesz-Fischer).

1. Der Quotientenraum $L^1(\mathbb{R}^n)$ aus Bemerkung 1.3.22.4 ist ein Banachraum:
Ist (f_k) eine Cauchy-Folge integrierbarer Funktionen, dann existiert eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ in L^1 . Dabei ist

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx.$$

2. Eine geeignete Teilfolge von (f_k) konvergiert fast überall punktweise gegen die Grenzfunktion f .

Beweis.

Wir wählen eine Teilfolge $(f_{k_\nu})_\nu$ der Cauchy-Folge aus, so dass

$$\|f_k - f_{k_\nu}\|_1 \leq 2^{-\nu} \text{ für alle } k \geq k_\nu.$$

Wir setzen

$$g_\nu := f_{k_{\nu+1}} - f_{k_\nu} \text{ und } g := \sum_{\nu=1}^{\infty} |g_\nu|.$$

Dann gilt nach der verallgemeinerten Dreiecksungleichung

$$\|g\|_1 \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_{k_{\nu+1}} - f_{k_\nu}\|_1 \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} = 1.$$

Nach Satz 1.3.20 ist somit die Menge

$$N := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = \infty\}$$

eine Nullmenge. Die Reihe g konvergiert also fast überall absolut. Für $x \notin N$ ist auch wegen der absoluten Konvergenz $f_{k_1}(x) \neq \infty$.

Wir definieren eine Funktion f durch

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_{k_\nu}(x) = f_{k_1}(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x) & \text{für } x \notin N, \\ 0 & \text{für } x \in N. \end{cases}$$

Nach Konstruktion konvergiert die Teilfolge (f_{k_ν}) fast überall punktweise gegen f . Nun prüft man noch, dass $f_k \rightarrow f$ in L^1 gilt. Sei dazu $\epsilon > 0$. Sei ein Index ρ so gewählt, dass

$$\sum_{\nu=\rho}^{\infty} \|g_\nu\|_1 \leq \epsilon \text{ und } \|f_k - f_{k_\rho}\|_1 \leq \epsilon \text{ für alle } k \geq k_\rho.$$

Da nach Voraussetzung f_{k_ρ} integrierbar ist, finden wir auch eine Treppenfunktion φ mit $\|f_{k_\rho} - \varphi\|_1 \leq \epsilon$. Damit gilt

$$\|f - \varphi\|_1 \leq \|f - f_{k_\rho}\|_1 + \|f_{k_\rho} - \varphi\|_1 \leq \left\| \sum_{\nu=\rho}^{\infty} g_\nu \right\|_1 + \epsilon \leq 2\epsilon.$$

Also liegt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Aus der Ungleichung folgt weiter

$$\left| \int f dx - \int f_k dx \right| \leq \int |f - f_k| dx \stackrel{1.2.5}{\leq} \|f - f_k\|_1$$

und somit $\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx$. □

Beispiel 1.4.4.

Man kann im Theorem von Riesz-Fischer 1.4.3 nicht auf die Auswahl einer Teilfolge verzichten, um punktweise Konvergenz zu erreichen. Betrachte etwa die folgende Funktionenfolge, auch "wandernder Buckel" genannt: schreibe $k \in \mathbb{N}$ eindeutig als $k = 2^\nu + q$ mit $0 \leq q < 2^\nu$. Sei

$$I_k := [q2^{-\nu}, (q+1)2^{-\nu}] \text{ und } f_k = 1_{I_k}.$$

Dann gilt $\|f_k\|_1 = \int f_k dx = 2^{-\nu} \rightarrow 0$. Aber an keiner Stelle geht $f_k(x)$ nach Null, da immer wieder Buckel der Höhe eins auftauchen.

Korollar 1.4.5.

Jede Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist L^1 -Grenzwert einer Folge (φ_k) von *Treppenfunktionen* mit:

- (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 < \infty$,
- (ii) (φ_k) konvergiert fast überall punktweise gegen f .

Beweis.

Da f integrierbar ist, gibt es eine Folge (ψ_k) von Treppenfunktionen mit $\|f - \psi_k\|_1 \rightarrow 0$. Nach dem Beweis des Satzes von Riesz-Fischer erhalten wir eine Teilfolge (φ_k) mit der Eigenschaft (i), die fast überall punktweise gegen eine Funktion \tilde{f} konvergiert, wobei $\tilde{f} + \mathcal{N} = f + \mathcal{N}$ in $L^1(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}$. Daraus folgt die zweite Eigenschaft. \square

Wir dehnen nun den kleinen Satz von Beppo Levi von Treppenfunktionen auf integrierbare Funktionen aus.

Theorem 1.4.6 (von Beppo Levi von der monotonen Konvergenz).

Sei (f_k) eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Sei die Funktion f durch $f(x) = \lim f_k(x)$ als punktwiser Grenzwert definiert. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn die Folge der Integrale $(\int f_k dx)$ beschränkt ist. In diesem Fall gilt:

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx.$$

Beweis.

Die Bedingung, dass die Folge $(\int f_k dx)$ beschränkt ist, ist notwendig für die Integrierbarkeit der Grenzfunktion wegen der Ungleichungen $\int f_k dx \leq \int f dx$.

Sei umgekehrt die Folge der Integrale beschränkt. Da sie monoton ist, konvergiert sie. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es also einen Index N , so dass für alle $m \geq k \geq N$ gilt

$$\int f_m dx - \int f_k dx < \epsilon.$$

Es folgt wegen der Monotonie von (f_k) , dass

$$\|f_m - f_k\|_1 \stackrel{1.2.5}{=} \int |f_m - f_k| dx = \int f_m dx - \int f_k dx < \epsilon.$$

Also ist (f_k) eine L^1 -Cauchy-Folge.

Nach dem Theorem von Riesz-Fischer 1.4.3 gibt es einen L^1 -Grenzwert $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1$. Es existiert eine Teilfolge mit $f_{k_\nu} \rightarrow \tilde{f}$ fast überall. Fast überall gilt somit $\tilde{f} = f$, so dass nach dem Modifikationsatz 1.3.21 auch f integrierbar ist. \square

Bemerkungen 1.4.7.

1. Sei (A_k) eine Ausschöpfung einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und f eine Funktion auf $A \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass f über jedes A_k integrierbar ist.

Dann ist f genau dann über A integrierbar, wenn die Folge der Integrale $(\int_{A_k} |f| dx)$ beschränkt ist. In diesem Fall gilt

$$\int_A f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f dx.$$

Denn ist f integrierbar, so ist auch $|f|$ integrierbar und es gilt wegen $A_k \subseteq A$

$$\int_{A_k} |f| \leq \int_A |f|.$$

Ist umgekehrt die Folge der Integrale beschränkt, so zieht man sich nach Abänderung auf einer Nullmenge auf nichtnegative, reellwertige Funktionen zurück. Sei also $f \geq 0$. Dann ist die Folge $(\int_{A_k} f)$ monoton wachsend mit Grenzfunktion $\int_A f$. Aus dem Satz von Beppo Levi 1.4.6 folgt, dass f_A integrierbar ist.

2. Wir betrachten den Spezialfall der Funktion $f = 1$: es ist dann die Teilmenge A genau dann messbar, wenn die Folge $v(A_k)$ der Volumina für eine Ausschöpfung durch messbare Mengen beschränkt ist. In diesem Fall gilt $v(A) = \sup v(A_k)$.
3. σ -Additivität: Ist $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ abzählbare Vereinigung paarweise disjunkter messbarer Mengen $B_k \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} v(B_k) < \infty$, so ist B messbar mit Lebesgue-Maß $\sum_{k=1}^{\infty} v(B_k)$. Betrachte hierzu die Ausschöpfung $A_k := B_1 \cup \dots \cup B_k$ der Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_k$.

Theorem 1.4.8 (von Lebesgue von der majorisierten Konvergenz).

Sei (f_k) eine Folge integrierbarer Funktionen auf \mathbb{R}^n , die fast überall punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Es gebe eine integrierbare *Majorante*, d.h. eine integrierbare Funktion F mit $|f_k| \leq F$ für alle k .

Dann ist die Grenzfunktion f integrierbar, und es gilt

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx$$

Der Satz gilt analog für die Integration über eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Beweis.

- Da F integrierbar ist, ist die Menge, auf der $F(x) = \infty$ gilt, nach Satz 1.3.20 eine Nullmenge N' . Die Menge der $x \in \mathbb{R}^n$, für die $f_k(x)$ nicht gegen $f(x)$ geht, ist nach Annahme ebenfalls eine Nullmenge N'' . Wir ändern auf der Nullmenge $N := N' \cup N''$ die Funktionen f_k , f und F ab, indem wir 0 als Funktionswert setzen. (Die Integrierbarkeit, die Ungleichung $|f_k| \leq F$ und die Werte der Integrale bleiben unverändert.) Wir können daher annehmen, dass alle Funktionswerte endlich sind und dass f die Grenzfunktion ist. Außerdem können wir wieder annehmen, dass f reellwertig und nicht-negativ ist.
- Wir betrachten die Funktion $g_k := \sup\{f_i \mid i \geq k\}$. Für jedes feste k ist die Funktionenfolge

$$g_{k,\nu} := \max(f_k, \dots, f_{k+\nu}) \text{ mit } \nu = 0, 1, 2, \dots$$

monoton wachsend und konvergiert gegen die Funktion g_k . Die Funktionen $g_{k,\nu}$ sind als Maxima integrierbarer Funktionen integrierbar nach Korollar 1.2.7.2 und die Folge ihrer Integrale ist durch $\int F$ beschränkt. Nach dem Satz von Beppo Levi 1.4.6 folgt, dass alle Funktionen g_k integrierbar sind:

$$\left| \int g_k \right| = \left| \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int g_{k,\nu} dx \right| \leq \int F dx.$$

- Auf die monoton fallende Folge (g_k) , die gegen f konvergiert, und deren Integrale nach der Abschätzung durch $\int F dx$ beschränkt sind, können wir wieder den Satz von Beppo Levi 1.4.6 anwenden. Also ist auch f integrierbar und es gilt

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k dx.$$

Analog betrachtet man noch die Funktion $g_k^* := \inf\{f_i \mid i \geq k\}$ und erhält die Aussage

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k^* dx.$$

Aus $g_k^* \leq f_k \leq g_k$ folgt nun die Aussage. □

Wir haben nun Hilfsmittel, um integrierbare Funktionen zu identifizieren. Wir erinnern an den Begriff der σ -Kompaktheit aus Definition (1.3.7) und definieren weiterhin:

Definition 1.4.9

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine σ -kompakte Menge. Eine Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt lokal-integrierbar, wenn sie über jede kompakte Teilmenge $K \subseteq A$ integrierbar ist.

Bemerkung 1.4.10.

Jede stetige Funktion auf einer σ -kompakten Menge ist nach Satz 1.2.13.2 lokal integrierbar.

Korollar 1.4.11.

Sei A eine σ -kompakte Menge.

1. Majorantenkriterium:

Sei $f: A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine lokal-integrierbare Funktion, die eine über A integrierbare Majorante F hat, d.h. es gilt

$$|f(x)| \leq F(x) \text{ fast überall auf } A.$$

Dann ist f über A integrierbar.

2. Sei $f: A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ integrierbar, $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ lokal-integrierbar und beschränkt. Dann ist auch das Produkt $f \cdot g$ integrierbar auf A .
3. Die Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ sei fast überall stetig auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und habe eine über U integrierbare Majorante F . Dann ist f über der offenen Menge U integrierbar.

Beweis.

1. Sei $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ eine Ausschöpfung durch kompakte Mengen A_k . Die Folge der Funktionen (f_{A_k}) konvergiert dann punktweise gegen f_A . Da alle Einschränkungen f_{A_k} integrierbar sind und $|f_{A_k}| \leq F_A$, möglicherweise wieder nach einer Abänderung auf einer Nullmenge, folgt die Behauptung aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz 1.4.8.
2. Das Produkt $f \cdot g$ ist lokal integrierbar. Sei M Schranke von g , also $M \geq |g(x)|$ für alle $x \in A$. Dann ist $F := |f| \cdot M$ eine integrierbare Majorante des Produkts $f \cdot g$.
3. Wegen des Majorantenkriteriums in Teil 1 reicht es zu zeigen, dass f lokal-integrierbar ist. Die Integrierbarkeit über ein beliebiges Kompaktum folgt nun aus Korollar 1.3.25. □

Beispiel 1.4.12.

Sei f integrierbar über \mathbb{R} . Für jedes $x \in \mathbb{R}$ hat die Funktion $t \mapsto f(t) \exp(-ixt)$ wegen $|f(x) \exp(-ixt)| = |f(x)|$ die integrierbare Majorante $|f|$ und ist somit nach Korollar 1.4.11.3 über \mathbb{R} integrierbar. Die durch das Integral definierte Funktion

$$\begin{aligned} \hat{f}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-ixt) dt \end{aligned}$$

heißt die *Fourier-Transformierte* von f .

Satz 1.4.13 (Verallgemeinerter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

Sei f eine differenzierbare Funktion auf dem kompakten Intervall $[x_0, x]$, deren Ableitung beschränkt ist. Dann ist die Ableitung f' Lebesgue-integrierbar über dem Intervall $[x_0, x]$, und es gilt

$$f(x) - f(x_0) = \int_{[x_0, x]} f'(t) dt$$

Beweis.

Übg. □

1.5 Parameterabhängige Integrale, der Satz von Fubini und der Transformationsatz

Wir folgen [K, §8.4, 8.5, 9.1-9.3].

Sei X ein metrischer Raum und $T \subseteq \mathbb{R}^p$. Es sei die Funktion

$$\begin{aligned} f: X \times T &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, t) &\mapsto f(x, t) \end{aligned}$$

über T integrierbar für jedes feste $x \in X$. Wir definieren eine Funktion F auf dem metrischen Raum X durch die Integrale

$$F(x) := \int_T f(x, t) dt$$

Theorem 1.5.1 (Stetigkeitssatz).

Zusätzlich habe der Integrand f die folgenden Eigenschaften:

1. Für jedes feste $t \in T \subseteq \mathbb{R}^p$ ist die auf dem metrischen Raum X definierte Funktion $x \mapsto f(x, t)$ stetig.
2. Es gibt eine integrierbare Funktion $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $|f(x, t)| \leq \Phi(t)$ für alle $(x, t) \in X \times T$ gilt. (Man beachte, dass die Schranke unabhängig von $x \in X$ sein muss.)

Dann ist die Funktion $F(x) = \int_T f(x, t) dt$ auf X stetig.

Beweis.

Zu zeigen ist, dass für jede Folge (x_k) in X mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = F(x).$$

Wir betrachten für die Folge (x_k) in X die Folge der Funktionen

$$\begin{aligned} f_k: T &\rightarrow \mathbb{C} \\ f_k(t) &:= f(x_k, t) \end{aligned}$$

Wegen Voraussetzung 1 gilt dann punktweise Konvergenz, also für jedes $t \in T$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, t) = f(x, t).$$

Nach Voraussetzung 2 gilt punktweise $|f_k| \leq \Phi$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von der majorierten Konvergenz 1.4.8 folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_T f_k(t) dt = \int_T f(x, t) dt$$

Das heißt aber $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = F(x)$. □

Beispiel 1.5.2 (Stetigkeit der Fourier-Transformierten).

Sei f integrierbar auf \mathbb{R} , dann ist die Fourier-Transformierte aus Beispiel 1.4.12

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-ixt) dt$$

stetig. Denn die Funktion $x \mapsto f(t)e^{-ixt}$ ist für jedes feste $t \in T$ stetig in x und $\Phi(t) = |f(t)|$ ist eine von x unabhängige integrierbare Majorante, da

$$|f(t) \exp(-ixt)| = |f(t)| \cdot \underbrace{|\exp(-ixt)|}_1.$$

Theorem 1.5.3 (Differentiationssatz).

Neben den Voraussetzungen zu Beginn des Abschnitts sei jetzt $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Es habe $f: X \times T \rightarrow \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften:

1. Für jedes feste $t \in T$ ist die Funktion $x \mapsto f(x, t)$ stetig differenzierbar.
2. Es gibt eine integrierbare Funktion $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x, t) \right| \leq \Phi(t) \text{ für alle } (x, t) \in X \times T \text{ und } \nu = 1, \dots, n.$$

Dann ist die Funktion $F(x) = \int_T f(x, t) dt$ stetig differenzierbar. Ferner ist für jedes x die Funktion $t \mapsto \partial_{x_\nu} f(x, t)$ integrierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \int_T f(x, t) dt = \int_T \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x, t) dt.$$

Beweis.

Sei $x_0 \in X$ und $r > 0$ so gewählt, dass $B_r(x_0) \subseteq X$. Dies geht, da X offen ist. Sei (h_k) eine Nullfolge reeller Zahlen mit $0 < |h_k| < r$. Setze

$$x_k := x_0 + h_k e_\nu \text{ und } \varphi_k(t) := \frac{f(x_k, t) - f(x_0, t)}{h_k}.$$

Alle Funktionen φ_k sind auf T integrierbare Funktionen. Für jedes $t \in T$ gilt wegen der partiellen Differenzierbarkeit von f

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t) = \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0, t).$$

Aus dem Schrankensatz der Differentiation folgt mit Voraussetzung 2

$$|\varphi_k(t)| \leq \Phi(t).$$

Da Φ nach Voraussetzung 1 integrierbar sein soll, ist nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz 1.4.8 die Grenzfunktion $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0, t)$ integrierbar und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_T \varphi_k(t) dt = \int_T \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x_0, t) dt.$$

Wegen

$$\int_T \varphi_k(t) dt = \frac{F(x_k) - F(x_0)}{h_k}$$

folgt daraus die partielle Differenzierbarkeit der Funktion F und die Formel für die partielle Ableitung des Integrals. Mit dem Stetigkeitssatz folgt dann auch die stetige Differenzierbarkeit von F . \square

Satz 1.5.4 (Newton-Potential).

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kompaktum, $\rho: K \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, die die Interpretation einer Ladungs- oder Masseverteilung haben kann. Das *Newton-Potential* zu ρ ist die Funktion $u: \mathbb{R}^3 \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u(x) := \int_K \frac{\rho(y)}{\|x - y\|_2} dy \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$$

mit der durch

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

auf \mathbb{R}^n definierten euklidischen Norm. Wir behaupten:

1. Die Funktion u ist harmonisch:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = 0.$$

2. Für jeden Einheitsvektor $a \in \mathbb{R}^3$ gilt mit

$$M := \int_K \rho(y) dy$$

dass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \cdot u(ra) = M,$$

was wir auch in der Form $u(ra) \simeq M \cdot \frac{1}{r}$ schreiben.

Beweis.

- Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) := \frac{\rho(y)}{\|x - y\|_2} \text{ für } (x, y) \in (\mathbb{R}^3 \setminus K) \times K.$$

Für jedes feste $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ ist die Funktion $y \mapsto f(x, y)$ nach Korollar 1.4.11.2 integrierbar auf K , da ρ integrierbar sein soll und da die Funktion $\frac{1}{\|x - y\|_2} =: \frac{1}{r}$ stetig und daher auf dem Kompaktum K beschränkt ist. Für jedes $y \in K$ ist $x \mapsto f(x, y)$ zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^3 \setminus K$, also in der Variablen x .

- Wir beweisen die C^2 -Differenzierbarkeit der Funktion u auf allen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^3 \setminus K$ die von K einen Abstand $\varepsilon > 0$ haben. Dies reicht aus.

Wegen $\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3}(x_\nu - y_\nu)$ gilt

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x, y) \right| \leq \frac{1}{\varepsilon^2} |\rho(y)|$$

Man zeigt durch weiteres Ableiten die Abschätzung

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}(x, y) \right| \leq \frac{4}{\varepsilon^3} |\rho(y)|$$

Dies sind Abschätzungen gegen auf K integrierbare Funktionen, die nicht von x abhängen. Der Differentiationssatz 1.5.3 ist also in beiden Fällen anwendbar; er liefert die C^2 -Differenzierbarkeit von u und die Identität

$$\Delta_x \int_K \frac{\rho(y)}{\|x - y\|_2} dy = \int_K \rho(y) \underbrace{\Delta_x \left(\frac{1}{\|x - y\|_2} \right)}_{= \dots = 0} dy = 0.$$

- Sei $R > 0$ so groß gewählt, dass $K \subseteq B_R(0)$. Für $r > R$ ist dann $ra \notin K$ und es gilt

$$ru(ra) = \int_K \frac{r\rho(y)}{\|ra - y\|_2} dy = \int_K \frac{\rho(y)}{\|a - \frac{1}{r}y\|_2} dy$$

Die Funktion

$$g: [0, \frac{1}{2R}] \times K \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y) \mapsto \frac{\rho(y)}{\|a - ty\|_2}$$

ist für jedes y in t stetig. Ferner ist $|g(t, y)| \leq 2\rho(y)$ für alle $(t, y) \in [0, \frac{1}{2R}] \times K$. Mit dem Stetigkeitssatz 1.5.1 folgt somit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} ru(ra) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_K \frac{\rho(y)}{\|a - ty\|_2} dy = \int_K \rho(y) dy.$$

□

Wir verallgemeinern nun den kleinen Satz von Fubini 1.2.14 von stetigen beschränkten Funktionen auf integrierbare Funktionen.

Theorem 1.5.5 (Allgemeiner Satz von Fubini).

Schreibe $X := \mathbb{R}^p$ und $Y := \mathbb{R}^q$. Es sei $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ integrierbar. Dann gilt

1. Für fast alle $y \in Y$, d.h. außer für y in einer Nullmenge $N \subseteq Y$, ist die Funktion

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ x &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

über X integrierbar.

2. Setzt man für $y \notin N$

$$F(y) := \int_X f(x, y) dx$$

und $F(y) := 0$ für $y \in N$, dann ist die Funktion $F: Y \rightarrow \mathbb{C}$ über Y integrierbar und es gilt

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) = \int_Y F(y) dy.$$

Für diesen Sachverhalt schreiben wir auch

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy.$$

Es gilt analog

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx.$$

Die rechte Seite ist ein *iteriertes Integral*.

Beweis.

- *Schritt 1:* Ist $A \subseteq X \times Y$ eine Nullmenge, so gibt es eine Nullmenge $A' \subseteq Y$ derart, dass für $y \in Y \setminus A'$ alle Schnitte $A_y = \{x \in X \mid (x, y) \in A\}$ Nullmengen sind. (Man beachte, dass A_y nicht für *alle* $y \in Y$ eine Nullmenge sein muss. Betrachte etwa die Nullmenge $A = \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: für alle $y \in \mathbb{Q}$ ist $A_y = \mathbb{R}$ keine Nullmenge.)

Dies sieht man so:

Wir benutzen Satz 1.3.24, um zu gegebenen $\epsilon > 0$ abzählbar viele offene Quader Q_1, Q_2, \dots zu finden, so dass

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} v(Q_k) < \epsilon.$$

Dann schreiben wir jeden Quader als Produkt, $Q_k = Q'_k \times Q''_k$. Wir benutzen die Halbnorm $\|\cdot\|_1^X$ bezüglich X , um die Funktion

$$\begin{aligned} a: Y &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ y &\mapsto \|1_{A_y}\|_1^X \end{aligned}$$

einzuführen. Aus

$$1_{A_y} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1_{Q'_k} \cdot 1_{Q''_k}(y)$$

schließen wir mit Hilfe der verallgemeinerten Dreiecksungleichung

$$a(y) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_p(Q'_k) 1_{Q''_k}(y).$$

Daraus folgt nach der Definition der Halbnorm $\|\cdot\|_1^Y$ über Treppenfunktionen

$$\|a\|_1^Y \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_p(Q'_k) v_q(Q''_k) = \sum_{k=1}^{\infty} v_n(Q_k) < \epsilon.$$

Also ist $\|a\|_1^Y = 0$. Es gibt nach Bemerkung 1.3.22.3 eine Nullmenge $N \subseteq Y$, so dass $a(y) = \|1_{A_y}\|_1^X = 0$ und somit A_y eine Nullmenge ist für jedes $y \in Y \setminus N$.

- *Schritt 2:* Reduktion auf den Fall von Treppenfunktionen

Nach dem Korollar 1.4.5 zum Satz von Riesz-Fischer existiert eine Folge φ_k von Treppenfunktionen auf $X \times Y$ mit den Eigenschaften wie in Korollar 1.4.5:

1. $\varphi_k \rightarrow f$ punktweise außerhalb einer Nullmenge $A \subseteq X \times Y$
2. Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 < \infty$.

Wegen Eigenschaft 1 und nach der Beschreibung von Nullmengen $A \subseteq X \times Y$ in Schritt 1 folgt:

- (1_X) Es gibt eine Nullmenge $N' \subseteq Y$, so dass $\varphi_k(\cdot, y) \rightarrow f(\cdot, y)$ für y außerhalb N' punktweise fast überall auf X .

Betrachte die Treppenfunktion

$$H_k(y) := \int_X \underbrace{|\varphi_{k+1}(x, y) - \varphi_k(x, y)|}_{\geq 0} dx$$

Nach dem Satz von Fubini für Treppenfunktionen 1.1.9 folgt

$$\int_Y H_k(y) dy = \int_{X \times Y} |\varphi_{k+1}(x, y) - \varphi_k(x, y)| d(x, y) = \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1$$

Aus Eigenschaft 2. folgt nun, dass

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_Y H_k(y) dy = \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{k+1} - \varphi_k\|_1 < \infty.$$

Die Folge der Partialsummen $\sum_{k=1}^{\ell} H_k(y)$ wächst monoton und die Integrale $\int \sum_{k=1}^{\ell} H_k(y) dy$ sind beschränkt. Nach dem Satz von Beppo Levi 1.4.6 ist die Funktion $\sum_{k=1}^{\infty} H_k$ integrierbar. Insbesondere gilt wegen Satz 1.3.20, dass $\sum_{k=1}^{\infty} H_k(y) < \infty$ für alle y außerhalb einer Nullmenge $N'' \subseteq Y$ ist. Somit haben wir

- (2_X) Es gilt $\sum_k \|\varphi_{k+1}(\cdot, y) - \varphi_k(\cdot, y)\|_1^X < \infty$ für alle y außerhalb einer Nullmenge $N'' \subseteq Y$.

Also ist $(\varphi_k(\cdot, y))$ eine L^1 -Cauchy-Folge auf X . Daher erhält man für $y \notin N := N' \cup N''$ nach Riesz-Fischer 1.4.3, dass eine Teilfolge von $\varphi_k(\cdot, y)$ fast überall gegen eine integrierbare Funktion auf X konvergiert. Diese ist wegen Eigenschaft 1_X gleich $f(\cdot, y)$ fast überall. Damit ist $f(\cdot, y)$ über Y integrierbar und Aussage 1. des Satzes gezeigt.

- *Schritt 3:* Aus dem Satz von Riesz-Fischer 1.4.3 folgt außerdem für $y \in Y \setminus N$:

$$(**) \quad F(y) = \int_X f(x, y) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\int_X \varphi_k(x, y) dx}_{\Phi_k(y)}.$$

Zum Beweis des zweiten Teils der Aussage des Satzes setze

$$\Phi_k(y) := \int_X \varphi_k(x, y) dx.$$

Dies sind Treppenfunktionen auf Y mit den Eigenschaften

(1_Y) Die Folge (Φ_k) konvergiert auf $Y \setminus N$ punktweise gegen F . Dies ist die Aussage (**).

(2_Y) $\sum_{k=1}^{\infty} \|\Phi_{k+1} - \Phi_k\|_1^Y < \infty$. Dies folgt aus (*).

Wegen (2_Y) ist (Φ_k) eine L^1 -Cauchy-Folge von Treppenfunktionen auf Y . Nach dem Satz von Riesz-Fischer 1.4.3 konvergiert eine Teilfolge punktweise fast überall gegen eine integrierbare Funktion auf Y . Wegen (1_Y) stimmt diese mit F überein. Folglich ist auch F integrierbar über Y . Der Satz von Riesz-Fischer liefert schließlich

$$\begin{aligned} \int_Y F(y) dy &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Y \Phi_k(y) dy \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} \varphi_k(x, y) d(x, y) \\ &= \int_{X \times Y} f(x, y) d(x, y) \text{ [Eigenschaft 1. der } \varphi_k \text{]}. \end{aligned}$$

□

Aus dem Satz von Fubini 1.5.5 folgt sofort: Ist f über $X \times Y$ integrierbar, so gilt

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x, y) dx \right) dy.$$

Im Satz von Fubini haben wir *vorausgesetzt*, dass die Funktion auf $X \times Y$ integrierbar ist. Der Satz von Tonelli gibt hierfür ein Kriterium:

Theorem 1.5.6 (Satz von Tonelli).

Sei $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ eine fast überall stetige (oder lokal-integrierbare) Funktion. Dann ist f genau dann über $X \times Y$ integrierbar, wenn wenigstens eines der iterierten Integrale

$$\int_Y \left(\int_X |f(x, y)| dx \right) dy \text{ oder } \int_X \left(\int_Y |f(x, y)| dy \right) dx$$

existiert. Damit ist z.B. für das erste Integral wie im Satz von Fubini gemeint, dass für jedes $y \in Y$ außerhalb einer geeigneten Nullmenge $N \subseteq Y$ das Integral $\int_X |f(x, y)| dx$ existiert und dass die Funktion mit

$$F(y) := \int_X |f(x, y)| dx \text{ für } y \in Y \setminus N$$

und $F(y) = 0$ für $y \in N$ über Y integrierbar ist.

In dem Fall gelten die Aussagen des Satzes von Fubini 1.5.5 und die Vertauschungsregel.

Beweis.

Ist die Funktion f über $X \times Y$ integrierbar, so ist nach Satz 1.2.5 auch die Funktion $|f|$ über $X \times Y$ integrierbar. Somit ist die angegebene Bedingung nach dem Satz von Fubini 1.5.5 notwendig.

Zum Beweis der Umkehrung zeigen wir, dass unter der angegebenen Bedingung, etwa zu $\int_Y \left(\int_X |f(x, y)| dx \right) dy$, $|f|$ über $X \times Y$ integrierbar ist. Nach dem Majorantenkriterium in Korollar 1.4.11.1 bzw. 3. ist dann auch f über $X \times Y$ integrierbar und die Aussagen des Satzes von Fubini 1.5.5 gelten.

Sei dazu $h_k := \min(|f|, k \cdot \mathbf{1}_{[-k, k]^n})$; die Funktion h_k ist integrierbar: für eine lokal-integrierbare Funktion f folgt dies aus der Definition 1.4.9.2, für eine fast überall stetige Funktion aus Satz 1.3.25. Die Folge h_k konvergiert monoton wachsend gegen $|f|$. Die Folge der Integrale ist beschränkt:

$$\int_{X \times Y} h_k(x, y) d(x, y) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_Y \left(\int_X h_k(x, y) dx \right) dy \leq \int_Y \left(\int_X |f(x, y)| dx \right) dy$$

und mit dem Satz von Beppo Levi 1.4.6 folgt $|f| \in \mathcal{L}^1(X \times Y)$. □

Beispiel 1.5.7.

Aussage (und Voraussetzungen!) des Satzes von Fubini sind nicht erfüllt bei der Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

die nicht auf dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ integrierbar ist:

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| dy dx = \infty.$$

Dies sieht man so:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x, y)| dy &\geq \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} |f(x, y)| dy \\ &\geq \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \frac{x^2 - \frac{x^2}{2}}{(x^2 + \frac{x^2}{2})^2} dy \\ &= \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2}x^2}{(\frac{3}{2}x^2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Aber das Integral $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ ist nicht endlich. In der Tat darf man hier auch nicht die Integrationsgrenzen vertauschen: es ist

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx.$$

Bemerkung 1.5.8.

Für Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $g: Y \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definiert man eine Funktion

$$\begin{aligned} f \otimes g: X \times Y &\rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ (x, y) &\mapsto f(x) \cdot g(y) \end{aligned}$$

Sind die Funktionen f und g integrierbar, $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $g \in \mathcal{L}^1(Y)$, so ist $f \otimes g$ integrierbar, $f \otimes g \in \mathcal{L}^1(X \times Y)$.

Man rechnet dies für Treppenfunktionen nach und approximiert dann f und g durch Treppenfunktionen. Es gilt hierbei die Abschätzung $\|f \otimes g\|_{1, X \times Y} \leq \|f\|_{1, X} \|g\|_{1, Y}$, die man erhält, indem

man aus einer Hüllreihe von f und einer Hüllreihe von g eine Hüllreihe von $f \otimes g$ konstruiert. Mit dem Satz von Fubini 1.5.5 zeigt man schließlich:

$$\int_{X \times Y} (f \otimes g)(x, y) d(x, y) = \left(\int_X f(x) dx \right) \cdot \left(\int_Y g(y) dy \right)$$

Es ist also z.B. die Funktion $f(x, y) := x^{p-1}y^{q-1}$ für reelle p und q genau dann über das offene Quadrat $(0, 1)^2$ integrierbar, wenn $p > 0$ und $q > 0$.

Bemerkung 1.5.9.

Wir erinnern:

1. Seien $U, U' \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein Diffeomorphismus $T: U \rightarrow U'$ ist eine bijektive Abbildung, so dass die Abbildungen T und T^{-1} in jedem Punkt stetig differenzierbar sind.
2. Sei $T: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ Diffeomorphismus des Innern und ein Homöomorphismus auf dem abgeschlossenen Intervall. Sei $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann unterscheiden wir zwei Fälle, den orientierungserhaltenden und den orientierungsumkehrenden Fall:

$$(i) \quad T(a) = \alpha, T(b) = \beta \quad \text{und} \quad (ii) \quad T(a) = \beta, T(b) = \alpha.$$

Es gilt dann:

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad & \int_a^b f(T(x)) T'(x) dx = \int_\alpha^\beta f(y) dy \\ (ii) \quad & \int_a^b f(T(x)) \cdot \underbrace{T'(x)}_{<0} dx = \int_\beta^\alpha f(y) dy = - \int_\alpha^\beta f(y) dy \end{aligned} \right\}$$

In beiden Fällen gilt die Transformationsformel $\int_{[a,b]} f(T(x)) \cdot |T'(x)| dx = \int_{[\alpha,\beta]} f(y) dy$.

Theorem 1.5.10 (Transformationsatz).

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $T: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Dann ist die Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genau dann über V integrierbar, wenn die Funktion

$$f \circ T \cdot \left| \det \left(\frac{\partial T_\mu}{\partial x_\nu} \right)_{\mu,\nu} \right|$$

über U integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_U f(T(x)) \cdot \left| \det \left(\frac{\partial T_\mu}{\partial x_\nu}(x) \right)_{\mu,\nu} \right| dx = \int_V f(y) dy.$$

Bevor wir den Satz beweisen, bringen wir ein Plausibilitätsargument und diskutieren wichtige Spezialfälle.

Bemerkung 1.5.11.

Für das Plausibilitätsargument verwenden wir Riemannsche Summen und schreiben die Menge U als Vereinigung kleiner Quader, $U = \bigcup_k Q_k$. In jedem Quader wählen wir einen Punkt $x_k \in Q_k$. Wir approximieren so $v(U) \approx \sum_k v(Q_k)$.

Dann ist aber $V = T(U)$ die Vereinigung der “krummlinigen Quader” $T(Q_k)$. Lokal approximieren wir die Abbildung durch ihr Differential,

$$T(x) \approx T(x_k) + dT_{x_k}(x - x_k),$$

die eine affine Abbildung ist. Die “krummlinigen Quader” $T(Q_k)$ haben daher in Annäherung das Volumen

$$|\det(dT_{x_k})|v(Q_k).$$

Ist f stetig, so approximieren wir f auf dem kleinen Quader $T(Q_k)$ durch $f|_{T(Q_k)} \approx f(y_k)$ für $y_k = T(x_k) \in T(Q_k)$. Damit erhalten wir für das Integral:

$$\begin{aligned} \int_V f(y)dy &\approx \sum f(y_k) \cdot v(T(Q_k)) \approx \sum f(T(x_k))|\det(dT_{x_k})|v(Q_k) \\ &\approx \int_U f(T(x))|\det(dT_x)|dx. \end{aligned}$$

Korollar 1.5.12 (Spezialfall affiner Transformationen).

Sei $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine nicht-ausgeartete affine Transformation, also $T(x) = Ax + b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Dann ist $dT = A$ und somit $\det dT = \det A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ist $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ über eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbar, dann ist $f \circ T$ über die Urbildmenge $T^{-1}(K)$ integrierbar und es ist

$$\int_{T^{-1}(K)} f(T(x))dx = \frac{1}{|\det A|} \int_K f(y)dy.$$

Beweis.

Um den Transformationssatz 1.5.10 anzuwenden, betrachte man die triviale Fortsetzung f_K . Dann ist $f_K \circ T$ nur auf der Teilmenge $T^{-1}(K)$ von 0 verschieden. \square

Bemerkungen 1.5.13.

- Wir betrachten folgende Anwendung: Sei $T(x) = Ax + b$ eine invertierbare affine Abbildung des \mathbb{R}^n mit Umkehrabbildung $T^{-1}(y) = A^{-1}y - A^{-1}b$. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge, dann ist auch $T(K) \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und es gilt

$$v(T(K)) = |\det A| \cdot v(K).$$

Dies folgt durch Anwendung der affinen Transformationsformel auf die affine Abbildung T^{-1} :

$$v(T(K)) = \int_{T(K)} 1_K(T^{-1}(x))dx = |\det A| \int 1_K(y)dy = |\det A|v(K).$$

Es gilt also insbesondere für affine Abbildungen mit $A \in SL(n, \mathbb{R})$, dass $v(T(K)) = v(K)$. Zu solchen Abbildungen zählen alle Translationen der \mathbb{R}^n und alle Rotationen des \mathbb{R}^n mit der Standard-euklidischen Struktur, so dass wir die Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes gezeigt haben. Wir erwähnen nur, dass auch symplektische Transformationen, also insbesondere kanonische Transformationen eines Phasenraums, Determinante Eins haben und somit das Volumen erhalten.

2. Symmetrien des Newton-Potentials:

Wir verwenden Bezeichnungen wie in Beispiel 1.5.4. Sei nun speziell K eine kompakte Kugelschale und ρ sei eine rotationssymmetrische Massenverteilung,

$$\rho(Ay) = \rho(y) \text{ für alle } A \in \text{SO}(3).$$

Dann existiert nach Beispiel 1.5.4 das Potential überall und es gilt

$$u(Ax) = \int_K \frac{\rho(y)}{\|Ax - y\|_2} dy = \int_K \frac{\rho(A^{-1}y)}{\|x - A^{-1}y\|_2} dy \stackrel{1.5.10}{=} \int_K \frac{\rho(\gamma)}{\|x - \gamma\|_2} d\gamma = u(x).$$

Also ist dann auch das Newton-Potential u rotationssymmetrisch.

Wir kommen nun zum Beweis des Transformationssatzes:

Beweis.

Wir skizzieren hier nur die wichtigsten Beweisschritte und verweisen für Details auf [K, §9.2].

- *Schritt 1:*

Sei $N \subseteq U$ Nullmenge und T Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L . Dann ist auch das Bild $T(N) \subseteq V$ eine Nullmenge.

Man benutzt Überdeckungen der Nullmenge N durch achsenparallele Würfel $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} v_n(W_k) < \epsilon$ wie in Lemma 1.3.23.2. Dann liegt das Bild $T(N \cap W_k)$ in einem Würfel mit dem Volumen $(2L)^n v(W_k)$. Diese Würfel überdecken das Bild $T(N)$; die Summe ihrer Volumina ist kleiner als $(2L)^n \epsilon$. Somit ist $T(N)$ eine Nullmenge.

- *Schritt 2:*

Den Fall einer C^1 -Abbildung $T: U \rightarrow V$ führt man auf den Fall einer (Lipschitz-) stetigen Abbildung auf kompakten Mengen zurück, da nach dem Schrankensatz die C^1 -Abbildung auf jedem kompakten Würfel W_k Lipschitz-stetig ist.

- *Schritt 3:*

Man schätzt nun in mehreren Schritten die Änderung des Volumens kompakter Mengen unter dem Diffeomorphismus ab und findet: ist $K \subseteq U$ kompakt und der Rand ∂K eine Nullmenge, so gelten die Abschätzungen

$$\left(\min_{x \in K} |\det dT_x| \right) v(K) \leq v(T(K)) \leq \left(\max_{x \in K} |\det dT_x| \right) v(K).$$

- *Schritt 4:*

Unter dem Träger $\text{supp}(h)$ einer Funktion h auf einem metrischen Raum X versteht man die abgeschlossene Hülle der Menge derjenigen Punkte, in denen h nicht verschwindet:

$$\text{supp}(h) := \overline{\{x \in X | h(x) \neq 0\}}$$

Wir zeigen nun, dass der Transformationssatz für Treppenfunktionen φ mit Träger in der offenen Teilmenge V gilt.

Wegen Linearität genügt es, die Aussage für die charakteristische Funktion eines kompakten Quaders $Q \subseteq V$ zu zeigen. Mit $S := T^{-1}$ ist also zu zeigen:

$$\int_{S(Q)} |\det(dT_x)| dx = \int_Q 1 dy = v(Q) \quad (*)$$

Der Integrand des linken Integrals ist nach Voraussetzung stetig und daher über Q integrierbar.

Sei $\varepsilon > 0$. Da die Funktion $|\det dS|^{-1}$ auf Q gleichmäßig stetig ist, existiert eine Zerlegung von Q in kompakte Quader Q_i , die höchstens Randpunkte gemeinsam haben und so klein sind, dass

$$\max_{y \in Q_i} |\det dS_y|^{-1} - \min_{y \in Q_i} |\det dS_y|^{-1} \leq \varepsilon.$$

Auf $K_i := S(Q_i)$ gilt dann wegen $S = T^{-1}$

$$\max_{x \in K_i} |\det dT_x| - \min_{x \in K_i} |\det dT_x| \leq \varepsilon.$$

Durch Summation über alle Quader Q_i erhält man dann mit Schritt 3, dass

$$\left| \int_{S(Q)} |\det(dT_x)| dx - v(Q) \right| \leq \varepsilon v\left(\bigcup_i K_i\right)$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung (*).

• *Schritt 5:*

Sei f integrierbar über die offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Treppenfunktion ψ mit $\|f_V - \psi\|_1 < \varepsilon/2$. Wegen der punktweisen Ungleichung $|f_V - 1_V\psi| \leq |f_V - \psi|$ gilt dann auch

$$\|f_V - 1_V\psi\|_1 < \varepsilon/2.$$

Man überlegt sich nun, dass man seinerseits $1_V\psi$ durch eine Treppenfunktion φ mit Träger in V approximieren kann, so dass $\|1_V\psi - \varphi\|_1 \leq \varepsilon/2$.

Damit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion φ mit Träger in V und mit

$$\|f_V - \varphi\|_1 < \varepsilon.$$

• *Schritt 6:*

Nach Schritt 5 können wir f durch eine Folge (φ_k) von Treppenfunktionen mit Träger in V approximieren. Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir nach dem Satz von Riesz-Fischer 1.4.3 annehmen, dass (φ_k) auch außerhalb einer Nullmenge N punktweise gegen f geht.

Wir setzen

$$\tilde{\varphi}_k := (\varphi_k \circ T) \cdot |\det dT| \text{ und } \tilde{f} := (f \circ T) \cdot |\det dT|.$$

Aus Schritt 4 folgt, dass die Funktionen $\tilde{\varphi}_k$ über U integrierbar sind. Da für diese Funktionen nach Schritt 4 der Transformationssatz gilt, finden wir

$$\|\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_\ell\|_1 = \int_U |\tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_\ell| dx \stackrel{\text{Schritt 4}}{=} \int_V |\varphi_k - \varphi_\ell| dy = \|\varphi_k - \varphi_\ell\|_1.$$

Somit ist die Folge $(\tilde{\varphi}_k)$ eine Cauchy-Folge, die auch noch punktweise auf $U \setminus T^{-1}(N)$ gegen \tilde{f} geht. Aber nach Schritt 2 ist auch $T^{-1}(N)$ eine Nullmenge.

Somit können wir aus dem Satz von Riesz-Fischer 1.4.3 schließen, dass die Grenzfunktion \tilde{f} integrierbar ist und dass

$$\int_U \tilde{f} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U \tilde{\varphi}_k dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_V \varphi_k dy = \int_V f(y) dy.$$

□

Bemerkung 1.5.14 (Anwendung: Integration in Polarkoordinaten).

- Wir hatten bereits Polarkoordinaten für \mathbb{C} bzw. \mathbb{R}^2 eingeführt. Polarkoordinaten haben eine große rechnerische Bedeutung: durch sie wird die Integration über eine Kugelschale auf die Integration über einen Produktraum zurückgeführt, auf dem wir den Satz von Fubini 1.5.5 anwenden können.

- Für den \mathbb{R}^2 sind Polarkoordinaten durch den lokalen Diffeomorphismus

$$P_2: \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus S$$

$$(r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit $S := \{(x_1, 0) \mid x_1 \leq 0\}$ gegeben, dessen Bild also der entlang der negativen x -Achse "geschlitzte" \mathbb{R}^2 ist.

- Polarkoordinaten auf dem \mathbb{R}^3 sind durch den Diffeomorphismus

$$P_3: \mathbb{R}_+ \times \underbrace{(-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}_{\Pi_3} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus N$$

$$(r, \varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

mit $N := S \times \mathbb{R}$ definiert. Das Bild ist der entlang der Halbebene $x \leq 0, y = 0$ geschlitzte \mathbb{R}^3 .

- Für den \mathbb{R}^{n+1} betrachten wir nun induktiv Abbildungen

$$P_{n+1}: \mathbb{R}_+ \times \underbrace{(-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}_{=: \Pi_{n+1}} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \text{Nullmenge}$$

$$(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \mapsto \begin{pmatrix} P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cos \varphi_n \\ r \sin \varphi_n \end{pmatrix}$$

Man zeige als Übungsaufgabe, dass dies ein Diffeomorphismus ist.

- Für konstanten Radius r erhalten wir Sphären. Etwa für Radius $r = 1$ in Dimension $n = 4$ die 3-Sphäre

$$S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

- Wir brauchen auch die Determinanten der Differentiale: in Dimension $n = 2$ erhalten wir für die Jacobi-Matrix:

$$dP_2 = \begin{pmatrix} \partial_r(r \cos \varphi) & \partial_\varphi(r \cos \varphi) \\ \partial_r(r \sin \varphi) & \partial_\varphi(r \sin \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det(dP_2) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Man zeigt dann für $n \geq 3$ (ÜA):

$$\det dP_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \det dP_{n-1}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) \cdot r \cos^{n-2}(\varphi_{n-1});$$

daraus folgt dann rekursiv

$$\det dP_n = r^{n-1} \cdot C(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \text{ mit } C(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) := \cos^1 \varphi_2 \cdot \cos^2 \varphi_3 \cdot \dots \cdot \cos^{n-2} \varphi_{n-1}.$$

- Speziell kann man wegen $\det dP_3 = r^2 \cos \underbrace{\varphi_2}_{\theta}$ das Kugelvolumen $v(B_R^3(0))$ der dreidimensionalen Vollkugel folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} v(B_R^3(0)) &= \int_{B_R(0)} 1 dx = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \theta \, d\theta d\varphi dr \\ &= \int_0^R r^2 dr \cdot 2\pi \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Korollar 1.5.15.

1. Sei $I \subseteq [0, \infty)$ ein Intervall und

$$K(I) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \in I\}$$

die zugehörige Kugelschale im \mathbb{R}^n .

Dann ist eine Funktion $f: K(I) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf der Kugelschale genau dann integrierbar, wenn $f(P_n(r, \varphi)) \cdot r^{n-1} C(\varphi)$ auf $I \times \Pi_n \subseteq \mathbb{R}^n$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt nach dem Transformationssatz 1.5.10 und dem Satz von Fubini 1.5.5

$$\int_{K(I)} f(x) dx = \int_I \left(\int_{\Pi_n} f(P_n(r, \varphi)) \cdot C(\varphi) r^{n-1} d\varphi \right) dr.$$

2. Ist speziell f rotationssymmetrisch, d. h. $f(P_n(r, \varphi)) = g(r)$, so ist die Funktion f auf der Kugelschale $K(I)$ genau dann integrierbar, wenn die Funktion $g(r)r^{n-1}$ auf dem Intervall I integrierbar ist. Dann gilt

$$\int_{K(I)} f(x) dx = \int_I g(r) r^{n-1} dr \cdot \int_{\Pi_n} C(\varphi) d\varphi.$$

Betrachtet man hier den Spezialfall $f = 1$ und $I = [0, 1]$, so folgt mit $\kappa_n := v_n(B_1^n(0))$ dem Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel:

$$\kappa_n = \int_0^1 r^{n-1} dr \int_{\Pi_n} C(\varphi) d\varphi = \frac{1}{n} \int_{\Pi_n} C(\varphi) d\varphi.$$

Wir finden also für die rotationssymmetrische Funktion f

$$\int_{K(I)} f(x) dx = n\kappa_n \int_I g(r) r^{n-1} dr.$$

Beispiel 1.5.16 (Berechnung des Gauß-Integrals).

Wir rechnen durch Integration der rotationssymmetrischen Funktion $e^{-x_1^2 - x_2^2}$ über \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x_1^2 - x_2^2} dx = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr \\ &= \pi \int_0^\infty e^{-u} du = \pi, \end{aligned}$$

woraus $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ folgt.

2 Distributionen und Fouriertransformation

Für viele Zwecke braucht man mathematische Objekte, die allgemeiner als Funktionen sind. Distributionen treten auf in der Lösungstheorie partieller Differentialgleichungen, etwa beim Begriff der Fundamentallösung. Sie haben angenehme mathematische Eigenschaften. Korrelationsfunktionen in Quantenfeldtheorien sind typischerweise Distributionen.

2.1 Distributionen, Faltung von Funktionen und Distributionen

Material zu diesem Kapitel findet man in [F, §10,§17]. Die folgenden Begriffe waren schon Gegenstand der MfP2.

Definition 2.1.1

1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Wir bezeichnen mit $C^m(U)$ den \mathbb{R} -Vektorraum der m -mal stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen in U und mit $C^\infty(U)$ den Vektorraum der beliebig oft stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen.
2. Wir verwenden wieder Multiindizes: für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ bezeichnen wir mit $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ die Ordnung von α und setzen

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \text{ und } \partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f, \text{ mit } \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

3. Ein linearer Differentialoperator der Ordnung k auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ hat die Gestalt

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha,$$

mit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $a_\alpha \in C^\infty(U)$.

4. Sind alle Koeffizientenfunktionen a_α konstant, so spricht man von einem Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten.

Bemerkungen 2.1.2.

1. Für jeden linearen Differentialoperator L der Ordnung k definiert man durch $f \mapsto Lf$ lineare Abbildungen $C^m(U) \rightarrow C^{m-k}(U)$, $m \geq k$, bzw. $C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$.
2. Lineare Differentialoperatoren der Ordnung $k = 0$ sind einfach die Multiplikation $f \mapsto a_0 f$ mit einer glatten Funktion a_0 .
3. Die linearen Differentialoperatoren der Ordnung k bilden einen Vektorraum. Des Weiteren definiert man mit Hilfe der Komposition der Abbildungen $f \mapsto L_i f$ die Komposition oder Hintereinanderausführung $L_1 \circ L_2$ von Differentialoperatoren.

Sei L_1 ein Differentialoperator der Ordnung k und L_2 ein Differentialoperator der Ordnung l . Man zeigt, dass $L_1 \circ L_2$ ein Differentialoperator der Ordnung $k + l$ ist. Insbesondere kann man ihn in der Form $\sum_{|\alpha| \leq k+l} a_\alpha \partial^\alpha$ schreiben.

4. Es ist dabei im allgemeinen $L_1 \circ L_2 \neq L_2 \circ L_1$, d.h. der Kommutator $[L_1, L_2] := L_1 \circ L_2 - L_2 \circ L_1$ ist i.a. $\neq 0$.

Beispiel 2.1.3.

Wir betrachten Differentialoperatoren auf \mathbb{R}^n . Seien $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Wir setzen $L_1 = \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ und $L_2 = x_k$.

Dann gilt für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ nach der Produktregel:

$$L_1(L_2f) = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_k \cdot f) = \delta_{kj}f + x_k \frac{\partial}{\partial x_j}f,$$

sowie

$$L_2(L_1f) = x_k \frac{\partial}{\partial x_j}f,$$

also ist $[L_1, L_2] = [\partial_j, x_k] = \delta_{kj}$. Dieser Kommutator ist fundamental für die Quantenmechanik.

Definition 2.1.4

1. Wir bezeichnen für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ den Raum der Funktionen $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, für die
 - (a) alle partiellen Ableitungen $\partial^\alpha \varphi$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$ existieren und stetig sind.
 - (b) deren Träger $\text{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n: \varphi(x) \neq 0\}}$ kompakt ist.
2. Als Testfunktion bezeichnen wir alle Funktionen aus dem Raum $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Man bezeichnet den Raum der Testfunktionen auch mit $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
3. Wir definieren einen Konvergenzbegriff auf dem Raum der Testfunktionen. Sei (φ_ν) eine Folge von Testfunktionen und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine Testfunktion. Dann sagen wir

$$\varphi_\nu \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi,$$

wenn

- (a) es ein Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\text{supp}(\varphi_\nu) \subseteq K$ für alle ν und $\text{supp}(\varphi) \subseteq K$.
- (b) für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ die Folge der Ableitungen $\partial^\alpha \varphi_\nu$ für $\nu \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf K gegen $\partial^\alpha \varphi$ geht.

Bemerkung 2.1.5.

1. Der Konvergenzbegriff in \mathcal{D} kommt von einer Metrik, insbesondere ist der Grenzwert eindeutig.
2. Die Konvergenz von (φ_ν) gegen φ in \mathcal{D} ist eine viel stärkere Bedingung als die punktweise oder gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen.
3. Wir bemerken, dass für jeden linearen Differentialoperator L und für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ auch $L\varphi$ eine Testfunktion ist.

Definition 2.1.6

Eine Distribution auf dem \mathbb{R}^n ist eine stetige lineare Abbildung

$$T: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto T[\varphi].$$

Dabei bedeutet die Stetigkeit von T , dass für jede Folge (φ_ν) in \mathcal{D} mit $\varphi_\nu \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ Konvergenz $T[\varphi_\nu] \rightarrow T[\varphi]$ in \mathbb{R} gilt.

Der Vektorraum aller Distributionen auf dem \mathbb{R}^n wird mit $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ oder kurz \mathcal{D}' bezeichnet.

Beispiel 2.1.7.

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sei

$$T_f[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)d^n x.$$

Es ist T_f linear und stetig (vgl. ÜA), also eine Distribution. Man nennt T_f die durch f definierte reguläre Distribution.

Wir brauchen eine spezielle Funktion mit kompaktem Träger:

Betrachtung 2.1.8.

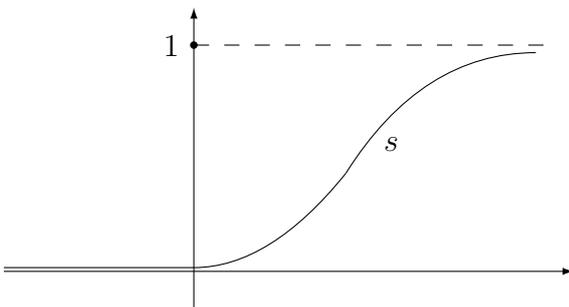
Die Funktion

$$s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } s(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar. Setzt man

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } g(t) := s(1+t) \cdot s(1-t)$$

so ist auch g beliebig oft differenzierbar; es gilt



$$g(t) \neq 0 \iff t \in (-1; 1),$$

also $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, mit $\text{supp}(g) = [-1, 1]$.

Lemma 2.1.9.

Ist U offen im \mathbb{R}^n und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \varphi(x) d^n x = 0$ für alle Testfunktionen $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, so ist $f = 0$.

Insbesondere ist die lineare Abbildung $T: C(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ injektiv.

Man kann daher stetige Funktionen f mit den ihnen zugeordneten regulären Distributionen identifizieren, die wir dann sowohl mit $T_f \in \mathcal{D}'$ als auch wieder mit f bezeichnen.

Beweis.

Angenommen, es gibt einen Punkt $a \in U$ mit $f(a) \neq 0$. Ohne Einschränkung können wir $f(a) > 0$ annehmen. Wegen der Stetigkeit von f gibt es dann eine Umgebung $V \subseteq U$ von a und ein $\delta > 0$, so dass

$$f(x) \geq \delta \text{ für alle } x \in V.$$

Es gibt aber wegen Betrachtung 2.1.8 eine glatte Funktion $\varphi \geq 0$ mit kompaktem Träger und $\text{supp}\varphi \subseteq V$. Damit ist

$$\int_U f(x)\varphi(x) \stackrel{\text{supp}\varphi \subseteq V}{=} \int_V f(x)\varphi(x) \geq \delta \int_V \varphi(x) > 0.$$

□

Beispiel 2.1.10.

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine lokal-integrierbare Funktion. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ wie oben sei

$$T_f[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)d^n x.$$

Durch $T: f \mapsto T_f$ wird dann eine lineare Abbildung vom Raum der lokal-integrierbaren Funktionen $\mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ in den Raum der Distributionen $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gegeben, deren Kern aus den lokal-integrierbaren Funktionen besteht, die fast überall Null sind.

Auch in diesem Fall nennt man T_f die durch f definierte *reguläre Distribution*, und man bezeichnet $T_f \in \mathcal{D}'$ oft auch wieder einfach mit f .

Es stellt sich also die Frage, ob es Distributionen gibt, die nicht regulär sind.

Beispiel 2.1.11 (Diracsche δ -Distribution).

Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten die Linearform auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, die auf $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ den Wert

$$\delta_a[\varphi] := \varphi(a) \in \mathbb{R}$$

annimmt. Dann ist δ_a linear und stetig, also eine Distribution, die *Diracsche δ -Distribution* zum Punkt a . Wir geben ohne Beweis an, dass es kein $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ gibt mit $T_f = \delta_a$.

Wir wollen nun auch Konvergenz von Distributionen einführen:

Definition 2.1.12

Ist $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution und $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Distributionen in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, so sagen wir T_ν konvergiert in \mathcal{D}' gegen T , in Zeichen

$$T_\nu \xrightarrow{\mathcal{D}'} T,$$

wenn für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu[\varphi] = T[\varphi]$$

Der letzte Grenzwert ist der Grenzwert einer Folge reeller Zahlen. Die Konvergenz in \mathcal{D}' wird also mit Funktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ "getestet".

Beispiel 2.1.13.

Sei (f_ν) eine Folge stetiger Funktionen f_ν , die auf jedem Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^n$ gleichmäßig gegen die Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt dann nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz 1.4.8

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x) \varphi(x) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) d^n x.$$

also

$$T_{f_\nu} \xrightarrow{\mathcal{D}'} T_f.$$

Satz 2.1.14 (Dirac-Folgen).

Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ eine (Lebesgue-)integrierbare Funktion auf dem \mathbb{R}^n mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x = 1.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k(x) := k^n f(kx)$. Dann gilt für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) \varphi(x) d^n x = \varphi(0).$$

also

$$f_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_0.$$

Man denke bei f z.B. an eine glockenförmige Funktion, so dass die Funktionen f_k mit wachsendem k immer steiler und immer mehr um den Nullpunkt konzentriert sind, vgl. ÜA.

Beweis.

Mit der Substitution $y = kx$ erhalten wir

$$\int f_k(x) \varphi(x) d^n x \stackrel{\text{def}}{=} \int k^n f(kx) \varphi(x) d^n x \stackrel{y=kx}{=} \int f(y) \varphi(y/k) d^n y.$$

Sei $M := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)|$. Dann gilt

$$|f(y) \varphi(y/k)| \leq M |f(y)| \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } y \in \mathbb{R}^n,$$

so dass $f(y) \varphi(y/k)$ für alle k gegen eine integrierbare Majorante abgeschätzt ist. Wegen der Stetigkeit der Testfunktion φ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(y) \varphi(y/k) = f(y) \varphi(0).$$

Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz 1.4.8 folgt daher

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(y/k) d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi(0) d^n y = \varphi(0).$$

□

Bemerkung 2.1.15 (und Definition).

Wir möchten die Ableitung von Distributionen definieren. Dabei soll die Ableitung einer regulären Distribution T_f gerade die zur Ableitung von f gehörende reguläre Distribution sein. Genauer: Ist ein linearer Differentialoperator L auf dem \mathbb{R}^n gegeben, so möchten wir eine Abbildung $L: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$ erklären mit

$$LT_f = T_{Lf}.$$

Sei L ein Differentialoperator der Ordnung k auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Differentialoperator M der Ordnung k in U heißt (formal-)adjungiert zu L , falls

$$\int_U (Mf) \cdot \varphi d^n x = \int_U f \cdot (L\varphi) d^n x$$

für alle $f \in C^k(U)$, $\varphi \in C_c^k(U)$ gilt.

Wir brauchen später dafür das folgende

Lemma 2.1.16.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt:

1. $\int_U \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} d^n x = 0$ für alle $\varphi \in C_c^1(U)$.
2. $\int_U \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \varphi(x) d^n x = - \int_U f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} d^n x$ für $f \in C^1(U)$ und $\varphi \in C_c^1(U)$.

Es ist dabei jeweils wesentlich, dass mindestens eine der auftretenden Funktionen kompakten Träger in U hat. Andernfalls gibt es Randterme.

Beweis.

Es folgt 2. aus 1., denn $f \cdot \varphi \in C_c^1(U)$ und es gilt nach der Produktregel

$$\frac{\partial(f\varphi)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \varphi + f \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}.$$

Zum Beweis von 1. nehmen wir $U = \mathbb{R}^n$ an, indem wir $\varphi \in C_c^1(U)$ durch Null zu einer Funktion in $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. Ferner können wir uns auf den Fall $j = 1$ beschränken. Sei $R > 0$ so groß gewählt, dass $\text{supp} \varphi \subseteq (-R, R)^n$. Für jedes feste $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} dx_1 = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \Big|_{x_1=-R}^{x_1=R} = 0$$

und somit auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} d^n x = 0.$$

□

Satz 2.1.17.

Zu jedem Differentialoperator L der Ordnung k auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt es einen eindeutig bestimmten (formal-)adjungierten Operator $M =: L^*$. Es gilt:

1. $(\lambda L)^* = \lambda L^*$ für $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $(L_1 + L_2)^* = L_1^* + L_2^*$

3. $(L_1 \circ L_2)^* = L_2^* \circ L_1^*$

Beweis.

- Zur Eindeutigkeit: seien M und M' beide formal adjungiert zu dem Differentialoperator L . Dann gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(U)$ und $f \in C^k(U)$

$$\int_U (Mf - M'f) \cdot \varphi = \int_U (f - f) \cdot L\varphi = 0.$$

Aus Lemma 2.1.9 folgt nun $Mf - M'f = 0$ für alle $f \in C^k(U)$ und somit $M = M'$.

- Wir zeigen die Rechenregeln unter der Annahme der Existenz des adjungierten Differentialoperators: existieren L^*, L_1^* und L_2^* , so existieren $(\lambda L)^*, (L_1 + L_2)^*$ und $(L_1 \circ L_2)^*$ und haben die angegebene Form. Dies folgt daraus, dass für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned} \int ((\lambda L)^* f) \varphi &= \int f (\lambda L) \varphi = \lambda \int f (L \varphi) = \int (\lambda L^* f) \varphi \\ \int ((L_1 + L_2)^* f) \varphi &= \int f (L_1 + L_2) \varphi = \int (L_1^* f) \varphi + \int (L_2^* f) \varphi \\ \int (L_2^* \circ L_1^* f) \varphi &= \int (L_1^* f) (L_2 \varphi) = \int f ((L_1 \circ L_2) \varphi) = \int ((L_1 \circ L_2)^* f) \varphi \end{aligned}$$

mit Lemma 2.1.9.

- Für einen Differentialoperator nullter Ordnung $L = a$ mit $a \in C^\infty(U)$ ist $L^* = a$, denn

$$\int (af) \varphi = \int f (a\varphi).$$

Für $L = \frac{\partial}{\partial x_i}$ folgt aus Lemma 2.1.16.2, dass $L^* = -\frac{\partial}{\partial x_i}$. Da sich jeder lineare Differentialoperator durch Addition und Komposition aus diesen speziellen Differentialoperatoren aufbauen lässt, folgt die Existenz des adjungierten Operators.

□

Beispiel 2.1.18.

1. Sei $L = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n a_j \circ \frac{\partial}{\partial x_j}$ ein Differentialoperator erster Ordnung. Dann ist

$$L^* = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^* \circ a_j = \sum_{j=1}^n -\left[\frac{\partial}{\partial x_j}, a_j\right] - a_j \circ \frac{\partial}{\partial x_j} = -\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j}.$$

2. Für einen Differentialoperator $L = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \partial^\alpha$ mit *konstanten* Koeffizienten $c_\alpha \in \mathbb{R}$ erhält man induktiv:

$$L^* = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} c_\alpha \partial^\alpha.$$

Zum Beispiel ist der Laplace-Operator formal selbstadjungiert, also $\Delta^* = \Delta$.

Definition 2.1.19

Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution und L ein linearer Differentialoperator auf dem \mathbb{R}^n . Dann definieren wir eine Linearform $LT: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$(LT)[\varphi] := T[L^*\varphi] \text{ f\"ur alle } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Wir werden gleich sehen, dass die Linearform LT stetig auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist, also eine Distribution ist.

Beispiel 2.1.20.

1. Im Fall eines linearen Differentialoperators nullter Ordnung, $L = a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, ist

$$(a \cdot T)[\varphi] = T[a \cdot \varphi].$$

2. Im Fall eines linearen Differentialoperators erster Ordnung auf \mathbb{R} , etwa für $L = \frac{d}{dx}$, ist

$$\left(\frac{d}{dx}T\right)[\varphi] = -T\left[\frac{d}{dx}\varphi\right].$$

Insbesondere ist nun also eine Ableitung der Dirac-Distribution erklärt.

Bemerkungen 2.1.21.

1. Sei L ein Differentialoperator der Ordnung k . Für jede C^k -Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt für die reguläre Distribution zu Lf , dass

$$T_{Lf}[\varphi] = \int (Lf)\varphi = \int f(L^*\varphi) = T_f[L^*\varphi] \stackrel{2.1.19}{=} LT_f[\varphi].$$

Ist f differenzierbar, so stimmen also die Ableitungen als Funktion und als Distribution überein.

2. Es bleibt zu zeigen, dass für jede Distribution T die Linearform LT stetig ist und somit eine Distribution ist, also $LT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Gilt $\varphi_\nu \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, so folgt aus Bedingung (b) der Konvergenz von (φ_ν) in Definition 2.1.4,

dass $L^*\varphi_\nu \xrightarrow{\mathcal{D}} L^*\varphi$ und aufgrund der Stetigkeit der Distribution T für die Folge reeller Zahlen, dass

$$LT[\varphi_\nu] = T[L^*\varphi_\nu] \rightarrow T[L^*\varphi] = LT[\varphi].$$

Damit ist aber LT auf \mathcal{D} stetig und somit eine Distribution.

Satz 2.1.22.

Für Distributionen sind Limesbildung und Differentiation vertauschbar: gilt $T_\nu \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ und ist

L ein linearer Differentialoperator auf \mathbb{R}^n , so gilt $LT_\nu \xrightarrow{\mathcal{D}'} LT$.

Beweis.

Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine beliebige Testfunktion. Nach der Definition 2.1.12 der Konvergenz in \mathcal{D}' ist zu zeigen, dass

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (LT_\nu)[\varphi] = (LT)[\varphi].$$

Dies ist aber nach der Definition 2.1.19 von LT äquivalent zu

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} T_\nu[L^*\varphi] = T[L^*\varphi].$$

Dies folgt aber unmittelbar aus der Definition 2.1.12 von $T_\nu \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$, da für jede Testfunktion φ auch $L^*\varphi$ eine Testfunktion ist. \square

Beispiel 2.1.23.

- Wir betrachten die Folge der Funktionen $f_\nu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_\nu(x) := \sin \nu x$ für $\nu \in \mathbb{N}$. Diese konvergiert nicht. Es gilt aber im Sinne von Distributionen:

$$f_\nu \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0 \quad (\text{d.h. } T_{f_\nu} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0).$$

Betrachte dazu die Folge der Funktionen

$$g_\nu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } g_\nu(x) := -\frac{1}{\nu} \cos \nu x,$$

die auf \mathbb{R} gleichmäßig gegen die konstante Funktion 0 konvergiert. Wegen der Aussage in Beispiel 2.1.13 gilt

$$T_{g_\nu} \xrightarrow{\mathcal{D}'} T_0 = 0.$$

Wir dürfen nach Satz 2.1.22 Limesbildung und Differentiation vertauschen. Es ist $g'_\nu = f_\nu$, also gilt für die Ableitungen

$$T_{f_\nu} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \frac{d}{dx} 0 = 0.$$

- Wir betrachten die *Heavisidesche Sprungfunktion* (nach Oliver Heaviside):

$$H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0, \\ 1, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

An der Stelle $x = 0$ ist H nicht als Funktion differenzierbar. Es ist jedoch die zugehörige Distribution T_H differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dx} T_H = \delta_0.$$

Um dies zu sehen, betrachte $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und wähle $R > 0$ so groß, dass $\text{supp}(\varphi) \subseteq (-R, R)$ gilt. Dann ist

$$\left(\frac{d}{dx} T_H\right)[\varphi] \stackrel{\text{def 2.1.19}}{=} T_H[-\varphi'(x)] = -\int_0^R \varphi'(x) dx = -\varphi(x)|_0^R = \varphi(0).$$

Bemerkung 2.1.24.

Man kann analog komplexwertige Distributionen definieren. Man zeigt dann, dass eine komplexwertige Distribution $T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ die Gestalt $T = T_1 + iT_2$ hat, wobei $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ reellwertige Distributionen sind.

Für eine komplexwertige Distribution $T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ und eine komplexwertige Testfunktion $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist dann

$$T[\varphi] := (T_1[\varphi_1] - T_2[\varphi_2]) + i(T_1[\varphi_2] + T_2[\varphi_1]).$$

Betrachtung 2.1.25.

- Sei f lokal integrierbar und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine Testfunktion. Dann hat für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$y \mapsto f(y)\varphi(x - y)$$

kompakten Träger und ist in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Also ist das *Faltungsintegral*

$$(f \star \varphi)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x - y)d^n y$$

wohldefiniert.

- Ausgedrückt durch die Distribution T_f haben wir

$$(f \star \varphi)(x) := T_f[\check{\tau}_x \varphi]$$

mit der Testfunktion $\check{\tau}_x \varphi(y) := \varphi(x - y)$.

Daher definieren wir

Definition 2.1.26

Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine Testfunktion. Dann ist die Faltung

$$(T \star \varphi): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

die durch

$$(T \star \varphi)(x) := T[\check{\tau}_x \varphi] \text{ für } x \in \mathbb{R}^n$$

definierte Funktion.

Bemerkungen 2.1.27.

1. Das Faltungsprodukt $\star: (T, \varphi) \mapsto T \star \varphi$ ist linear in beiden Argumenten.
2. Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Nach Bemerkung 1.5.8 ist die Funktion $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ über \mathbb{R}^{2n} integrierbar. Daher ist auch die Funktion $(x, y) \mapsto f(x)g(x - y)$ über \mathbb{R}^{2n} integrierbar. Aus dem Satz von Fubini 1.5.5 folgt, dass für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ das Integral

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(\check{\tau}_x g)(y)d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)d^n y$$

definiert ist. Man setzt in den Punkten $x \in \mathbb{R}^n$, in denen das Integral nicht definiert ist, $(f \star g)(x) := 0$.

3. Zur Interpretation: sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und φ eine Testfunktion mit $\text{supp}(\varphi) \subseteq \overline{B_r(0)}$, die der Normierungsbedingung

$$\int_{B_r(0)} \varphi(x) dx = 1 \text{ und } \varphi \geq 0$$

genüge, was etwa bei einer Dichteverteilung der Fall ist. Die Faltung

$$(f \star \varphi)(x) = \int_{B_r(x)} f(y) \varphi(x - y) dy$$

ist dann die mit der Verteilung φ ausgeschmierte Funktion f .

Lemma 2.1.28 (Eigenschaften der Faltung).

Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Das Faltungsprodukt \star ist kommutativ, assoziativ und hat die folgenden Eigenschaften:

1. $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$,
2. $\text{supp}(f \star g) \subseteq \overline{\{x + y \mid x \in \text{supp}(f), y \in \text{supp}(g)\}}$.

Beweis.

Die Kommutativität folgt aus der Substitution $y \rightarrow x - y$ und der Transformationsformel 1.5.12 für affine Abbildungen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy \stackrel{1.5.12}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy$$

Die restlichen Aussagen überlassen wir als einfache Übungsaufgabe dem Leser. □

Beispiel 2.1.29.

Für die Diracsche δ -Distribution zum Punkt 0 gilt für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$(\delta_0 \star \varphi)(x) = \delta_0[\check{\tau}_x \varphi] = (\check{\tau}_x \varphi)(0) = \varphi(x - 0) = \varphi(x)$$

und somit

$$\delta_0 \star \varphi = \varphi.$$

Die Diracsche Deltadistribution verhält sich also wie ein neutrales Element für die Faltung.

Satz 2.1.30 (Differenzierbarkeit der Faltung).

Für jede Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist die Funktion $T \star \varphi$ beliebig oft differenzierbar, $T \star \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es gilt, mit $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\partial_j(T \star \varphi) = T \star (\partial_j \varphi) = (\partial_j T) \star \varphi.$$

Für den Beweis verweisen wir auf [F, §17].

2.2 Fourier-Transformation und temperierte Distributionen

Betrachtung 2.2.1.

1. Für 2π -periodische, über dem Intervall $[0, 2\pi]$ Riemann-integrierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ hatten wir Fourier-Reihen $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ betrachtet. Anstelle von Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \text{ für } k \in \mathbb{Z}$$

für periodische Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten wir die für eine beliebige integrierbare Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ durch

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx, \text{ mit } \xi \in \mathbb{R}$$

gegebene Fourier-Transformierte \hat{f} . Hierbei ist $\xi \in \mathbb{R}$ zugelassen, nicht nur $\xi \in \mathbb{Z}$. Dieses Integral existiert nach Beispiel 1.4.12. Wir entwickeln die Theorie gleich für integrierbare Funktionen auf dem \mathbb{R}^n , also $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

2. Betrachte den \mathbb{R}^n mit dem euklidischen Standardskalarprodukt

$$\langle x, \xi \rangle := \sum_{k=1}^n x_k \xi_k \text{ für } x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Für eine integrierbare Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ gehört die Funktion $x \mapsto f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle}$ als Produkt der integrierbaren Funktion f mit der lokal integrierbaren beschränkten Funktion $e^{-i\langle x, \xi \rangle}$ nach Korollar 1.4.11.2 wieder zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Also existiert das Integral

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d^n x, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

Die so definierte Funktion $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ist, wie wir in Beispiel 1.5.2 im Fall $n = 1$ gesehen haben, stetig nach dem Stetigkeitssatz 1.5.1 und beschränkt mit Schranke

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Definition 2.2.2

Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Die durch das Integral

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d^n x, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

definierte stetige und beschränkte Funktion $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ heißt die Fourier-Transformierte der Funktion f .

Beispiel 2.2.3.

Wir betrachten Gauß-Funktionen $f(x) = e^{-\|x\|^2/2}$ mit $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Im eindimensionalen Fall, $n = 1$ sieht man durch quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2 - ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2 - ix\xi + \xi^2/2} e^{-\xi^2/2} dx \\ &\stackrel{1.5.16}{=} e^{-\xi^2/2} = f(\xi).\end{aligned}$$

2. Man kann auch mit dem Differentiationssatz 1.5.3 argumentieren: Für die Funktion $F: \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2 - ix\xi} dx$ gilt nach einer partiellen Integration

$$\begin{aligned}F'(\xi) &\stackrel{1.5.3}{=} -i \int_{\mathbb{R}} x e^{-x^2/2} e^{-ix\xi} dx \\ &= i e^{-x^2/2} e^{-ix\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \xi \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-ix\xi} dx \\ &= -\xi F(\xi),\end{aligned}$$

so dass F der linearen Differentialgleichung $F'(\xi) = -\xi F(\xi)$ genügt. Da $F(0) = 2 \int_0^{\infty} e^{-(x/\sqrt{2})^2} dx = \sqrt{2\pi}$ gilt, erhält man $F(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}$ und damit wieder

$$\hat{f}(\xi) = f(\xi).$$

3. Ebenso ist im allgemeinen Fall $n > 1$:

$$\hat{f}(\xi) = \prod_{\nu=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_\nu^2/2} e^{-ix_\nu \xi_\nu} dx_\nu \right) = \prod_{\nu=1}^n e^{-\xi_\nu^2/2} = f(\xi).$$

Bemerkung 2.2.4.

1. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ eine integrierbare Funktion mit Fourier-Transformierter \hat{f} . Für $\lambda \neq 0$ setzen wir $g(x) := f(\lambda x)$. Mit Hilfe des Transformationssatzes 1.5.12 für die affine Transformation $y = \lambda x$ folgt

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d^n x = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{|\lambda|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle y, \xi \rangle} \frac{1}{\lambda} d^n y \\ &= \frac{1}{|\lambda|^n} \hat{f}\left(\frac{1}{\lambda} \xi\right).\end{aligned}$$

2. Als Beispiel erhalten damit für $a > 0$ die Fourier-Transformierte von $f(x) = e^{-\|x\|^2/2a^2}$ als

$$\hat{f}(\xi) = a^n e^{-a^2 \|\xi\|^2/2}.$$

Gauß-Funktionen mit kleinem a , also engem Peak, haben also Fourier-Transformierte mit großem Peak.

3. Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{für } |x| > 1. \end{cases}$$

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, und es ist für $\xi \neq 0$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \Big|_{x=-1}^{x=1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi}{\xi}$$

und $\hat{f}(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ für $\xi = 0$.

In diesem Fall ist zwar die Funktion f integrierbar, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, nicht aber ihre Fourier-Transformierte, $\hat{f} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Um die zweite Aussage zu sehen, beachte man, dass mit $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ auch $\|\hat{f}\|_1 = \|\hat{\hat{f}}\|_1 < \infty$ gelten müsste. Es ist aber für jedes $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$:

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{1}{k\pi} \underbrace{\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx}_2$$

und somit

$$\int_{(-k)\pi}^{k\pi} |\hat{f}| dx \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^k \frac{1}{\nu} \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} \infty.$$

Satz 2.2.5 (Rechenregeln für Fourier-Transformierte).

Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und \hat{f}, \hat{g} die zugehörigen Fourier-Transformierten.

1. Für $a \in \mathbb{R}^n$ betrachte die verschobene Funktion $(\tau_a f)(x) := f(x - a)$. Dann gilt $\widehat{\tau_a f}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-i\langle a, \xi \rangle}$.
2. Mit \star bezeichnen wir die Faltung. Dann gilt $\widehat{f \star g}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \hat{g}$. Fouriertransformation überführt also Faltungen in Produkte.
3. Ist $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ stetig differenzierbar mit kompakten Träger, so gilt für $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\widehat{(\partial_j f)}(\xi) = i\xi_j \cdot \hat{f}(\xi).$$

4. Ist für ein $j \in \{1, \dots, n\}$ die Funktion $x \mapsto x_j f$ integrierbar, so ist die Fouriertransformierte \hat{f} nach ξ_j stetig partiell differenzierbar und es gilt

$$\widehat{(x_j f)}(\xi) = i\partial_j \cdot \hat{f}(\xi).$$

5. Die Funktionen $\hat{f}g$ und $f\hat{g}$ sind integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\hat{g}(y) d^n y.$$

Beweis.

1. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_a f}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - a) e^{-i\langle x, \xi \rangle} d^n x && [y := x - a] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle y + a, \xi \rangle} d^n y = \hat{f}(\xi) e^{-i\langle a, \xi \rangle}. \end{aligned}$$

2. Mit dem Satz von Fubini 1.5.5 folgt

$$\begin{aligned} \widehat{f \star g}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x - t) dt \right) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x - t) e^{-i\langle x - t, \xi \rangle} dx \right) f(t) e^{-i\langle t, \xi \rangle} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) f(t) e^{-i\langle t, \xi \rangle} dt = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

3. Mit partieller Integration wie in Lemma 2.1.16 erhält man, da f kompakten Träger haben soll,

$$\begin{aligned} (2\pi)^{n/2} \widehat{(\partial_j f)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j} e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (-i\xi_j) e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx = (2\pi)^{n/2} (i\xi_j) \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

4. Folgt aus dem Differentiationssatz 1.5.3:

$$\begin{aligned} i\partial_j \cdot \hat{f}(\xi) &= \frac{i}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x) e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{x_j f}(\xi). \end{aligned}$$

5. Da \hat{f} und \hat{g} nach Betrachtung 2.2.1.2 stetig und beschränkt sind, sind die die Produkte $\hat{f} \cdot g$ und $f \cdot \hat{g}$ nach Korollar 1.2.6.4 integrierbar. Mit dem Satz von Fubini 1.5.5 erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y) e^{-i\langle y, x \rangle} dx dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle y, x \rangle} dx \right) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) g(y) dy. \end{aligned}$$

□

Wir bringen noch zwei Aussagen über das Verhalten von Fourier-Transformierten im Unendlichen.

Satz 2.2.6.

Zu jeder Funktion $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ mit $k \in \mathbb{N}$ gibt es eine positive Konstante $M > 0$, so dass für die Fouriertransformierte \hat{f} gilt

$$|\hat{f}(\xi)| \leq M(1 + \|\xi\|)^{-k} \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere ist für jedes $f \in C_c^{n+1}(\mathbb{R}^n)$ die Fouriertransformierte \hat{f} über \mathbb{R}^n integrierbar.

Beweis.

Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ von Ordnung kleiner als k gilt wegen Regel 2.2.5.3

$$\widehat{(\partial^\alpha f)}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi),$$

also wegen der Abschätzung (2) aus Betrachtung 2.2.1.2

$$|\xi^\alpha \hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|\partial^\alpha f\|_1.$$

Da f kompakten Träger hat, gibt es eine gemeinsame Schranke für alle $\|\partial^\alpha f\|_1$ mit $|\alpha| \leq k$. Deshalb gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass

$$(1 + |\xi_1| + \dots + |\xi_n|)^k |\hat{f}(\xi)| \leq M \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Mit der Abschätzung gegen die euklidische Norm

$$|\xi_1| + \dots + |\xi_n| \geq \|\xi\|_2$$

folgt

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{M}{(1 + |\xi_1| + \dots + |\xi_n|)^k} \leq M(1 + \|\xi\|_2)^{-k}.$$

□

Korollar 2.2.7.

Für jede Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt für die Fouriertransformierte $\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Beweis.

Dies folgt, weil man jede Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ durch eine Funktion $g \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der L^1 -Norm beliebig gut approximieren kann: zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $g \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g\|_1 < \epsilon$. Daraus folgt mit der Abschätzung (2) aus Betrachtung 2.2.1 aber

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f - g\|_1 < \frac{\epsilon}{(2\pi)^{n/2}}.$$

Wegen Satz 2.2.6 gilt aber $\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \hat{g}(\xi) = 0$.

□

Theorem 2.2.8. [Inversionsformel.]

Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion derart, dass auch die Fouriertransformierte $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist. Dann gilt für f , eventuell nach Abänderung auf einer Nullmenge, dass f stetig ist mit $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0$,

und es ist

$$f(x) = \hat{\hat{f}}(-x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d^n \xi$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Für den Beweis verweisen wir auf [F, §13, Satz 2].

Bemerkung 2.2.9.

Eine Anwendung der Inversionsformel ist das *Abtasttheorem von Shannon*, das für die Signalverarbeitung grundlegend ist.

Eine stetige Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ wie in Satz 2.2.8 heißt *bandbegrenzt*, wenn für die Fouriertransformierte $\text{supp}(\hat{f}) \subseteq (-b, b)$ für ein $b \in \mathbb{R}$ gilt. (In technischen Anwendungen ist dies eine Beschränktheitsbedingung an die Frequenzdichte \hat{f} des Signals f .)

Das Abtasttheorem [K, §10] besagt dann, dass für jedes $T \leq \frac{\pi}{b}$ die Funktion f aus den periodisch genommenen Werten $f(kT), k \in \mathbb{Z}$ rekonstruiert werden kann:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \text{sinc} \left(\frac{1}{T}(x - kT) \right)$$

mit $\text{sinc}(x) := \sin(\pi x)/(\pi x)$.

Betrachtung 2.2.10.

- Wir betrachten ab jetzt komplexwertige Distributionen, die in Bemerkung 2.1.24 eingeführt wurden. Zur Erleichterung der Notation lassen wir in den Bezeichnungen $\mathcal{D}'_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ den Index \mathbb{C} ab sofort weg.

2. Zu $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ betrachte die durch f definierte reguläre Distribution T_f mit

$$T_f[\varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)d^n x \text{ für } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n).$$

Nach Rechenregel 2.2.5.5 gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\varphi(x)d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\hat{\varphi}(y)d^n y,$$

also, wenn auch $\hat{\varphi}$ eine Testfunktion ist,

$$T_{\hat{f}}[\varphi] = T_f[\hat{\varphi}].$$

3. Will man also die Fouriertransformierte \hat{T} einer Distribution T so definieren, dass $\widehat{\hat{T}} = T_{\hat{f}}$ für reguläre Distributionen gilt, so muss man

$$\hat{T}[\varphi] := T[\hat{\varphi}] \text{ für } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

setzen, soweit die rechte Seite definiert ist: Die Fouriertransformierte einer Funktion mit kompaktem Träger hat nicht notwendigerweise kompakten Träger, wie man am Beispiel der Funktion aus Bemerkung 2.2.4.3 sieht. Auch der Raum der Testfunktionen ist nicht unter der Fouriertransformation abgeschlossen. Wir brauchen daher einen größeren Raum von Testfunktionen, der mehr Stetigkeitsbedingungen liefert und somit einen kleineren Raum von Distributionen.

Definition 2.2.11

1. Mit \mathcal{S} bezeichnen wir die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C},$$

so dass es zu jedem Paar von Multiindizes $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ eine Zahl $C_{\alpha, \beta} \in \mathbb{R}_+$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|\underbrace{x_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\beta_n}}_{x^\beta} \cdot \partial^\alpha \varphi(x)| \leq C_{\alpha, \beta}.$$

Die Funktionen aus \mathcal{S} heißen schnell fallende oder temperierte Funktionen oder auch Schwartz-Funktionen.

2. Wir nennen \mathcal{S} auch den Schwartz-Raum.

3. Sei $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus \mathcal{S} und sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Dann sagen wir, $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert in \mathcal{S} gegen φ , in Zeichen

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi,$$

wenn für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ die durch

$$(1 + \|x\|)^j \partial^\alpha (\varphi_k - \varphi)(x)$$

definierten Folgen von Funktionen (in x) auf ganz \mathbb{R}^n gleichmäßig gegen 0 konvergieren.

Bemerkungen 2.2.12.

1. Temperierte Funktionen können auch durch die äquivalente Bedingung charakterisiert werden, dass es zu jedem Paar $(\alpha, j) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ eine Zahl $C_{\alpha, j} \in \mathbb{R}_+$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$(1 + \|x\|)^j |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C_{\alpha, j}.$$

2. Der Schwartz-Raum \mathcal{S} ist ein echter Untervektorraum des Raums der glatten Funktionen $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Zum Beispiel ist die Funktion $e^{-\alpha\|x\|^2}$ für jedes $\alpha > 0$ in \mathcal{S} , aber es ist z.B. die glatte Funktion $\frac{1}{1+x^2} \notin \mathcal{S}$ für $n = 1$.

Bemerkung 2.2.13.

Der Raum der Testfunktionen ist ein echter Unterraum der temperierten Funktionen, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}$, da ein kompakter Träger das Abfallverhalten für $\|x\| \rightarrow \infty$ impliziert. Auch bezüglich der Konvergenz ist der Raum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ der Testfunktionen ein Unterraum des Raums der temperierten Funktionen \mathcal{S} : Sind $\varphi_k, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und gilt

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi,$$

so gibt es nach Definition ein Kompaktum K mit

$$\text{supp}(\varphi_k - \varphi) \subseteq K \text{ für alle } k \in \mathbb{N}, \text{ und}$$

$$\partial^\alpha(\varphi_k - \varphi) \text{ konvergiert auf } K \text{ gleichmäßig gegen } 0 \text{ für alle } \alpha.$$

Da die Funktion $(1 + \|x\|)^j$ auf dem Kompaktum K beschränkt ist, konvergiert dann auch

$$(1 + \|x\|)^j \partial^\alpha(\varphi_k - \varphi)(x)$$

gleichmäßig auf K gegen 0. Sie konvergieren sogar gleichmäßig auf dem ganzen \mathbb{R}^n , denn außerhalb des Kompaktums K verschwinden alle diese Funktionen. Also gilt auch im Schwartz-Raum

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi.$$

Definition 2.2.14

Der Vektorraum \mathcal{S}' der stetigen, linearen Abbildungen auf dem Schwartz-Raum

$$T: \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}, \varphi \longmapsto T[\varphi].$$

heißt der Vektorraum der temperierten Distributionen. *Stetigkeit* heißt hierbei: für jede Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von temperierten Funktionen im Schwartz-Raum \mathcal{S} mit $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ konvergiert die Folge komplexer Zahlen $\lim_{k \rightarrow \infty} T[\varphi_k] = T[\varphi]$.

Bemerkung 2.2.15.

Die Bezeichnung “temperierte Distribution” legt es nahe, zu vermuten, dass “temperierte Distributionen” insbesondere Distributionen im Sinne von Definition 2.1.6 sind, $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{D}'$. Allerdings ist eine temperierte Distribution $T \in \mathcal{S}'$ eine lineare Abbildung $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ und eine Distribution $\tilde{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Abbildung $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$; die Definitionsbereiche sind also verschieden.

Nach Bemerkung 2.2.13 gilt aber $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}$ und damit ist für eine temperierte Distribution $T \in \mathcal{S}'$ die Restriktion

$$T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine Abbildung $\tilde{T}: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$. Die Restriktion ist natürlich eine lineare Abbildung, und auch stetig, denn wenn $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, dann gilt nach Bemerkung 2.2.13 auch $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ und damit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T[\varphi_k] = T[\varphi], \text{ also}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}[\varphi_k] = T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}[\varphi].$$

Also ist die Restriktion $T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ einer temperierten Distribution auf Testfunktionen eine Distribution, also ein Element von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Da die Abbildung

$$\mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{D}' \text{ mit } T \longmapsto T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$

auch injektiv ist, kann man den Raum der temperierten Distributionen \mathcal{S}' als Teilmenge des Raums der Distributionen $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ auffassen.

Betrachtung 2.2.16.

1. Für jede temperierte Funktion $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt $|\varphi(x)| \leq C_{0,j} \|x\|^{-j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und die Funktion $x \mapsto \|x\|^{-j}$ ist für $j > n$ auf dem Komplement jeder Kugel $B_R(0)$ integrierbar. Also ist jede temperierte Funktion über ganz \mathbb{R}^n integrierbar, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.
2. Wir wollen die Fouriertransformation von temperierten Distributionen einführen, so dass sie für reguläre Distributionen mit der üblichen Fouriertransformation übereinstimmt. Nach Betrachtung 2.2.10 gilt dann wegen Rechenregel 2.2.5.5, dass $T_{\hat{f}}[\varphi] = T_f[\hat{\varphi}]$.
3. Man kann zeigen [J], dass für jede Schwartzfunktion φ auch die Fouriertransformierte $\hat{\varphi}$ eine Schwartzfunktion ist. Ferner zeigt man, dass für jede temperierte Distribution T die durch $\hat{T}[\varphi] := T[\hat{\varphi}]$ für $\varphi \in \mathcal{S}$ definierte Linearform \hat{T} wieder eine temperierte Distribution ist.

Daher ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition 2.2.17

Sei $T \in \mathcal{S}'$ eine temperierte Distribution. Dann definieren wir die Fourier-Transformierte \hat{T} von T durch

$$\hat{T}[\varphi] := T[\hat{\varphi}] \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{S},$$

wobei $\hat{\varphi}$ die Fourier-Transformierte der Schwartz-Funktion $\varphi \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist.

Beispiel 2.2.18.

1. Wir wissen schon, dass für jede reguläre Distribution zu $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\widehat{T_f} = T_{\hat{f}}$.
2. Die lineare Abbildung

$$\delta_a: \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \delta_a[\varphi] := \varphi(a) \text{ für } a \in \mathbb{R}^n$$

ist eine temperierte Distribution, $\delta_a \in \mathcal{S}'$. Denn aus $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ folgt insbesondere $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(a) = \varphi(a)$, denn gleichmäßige Konvergenz impliziert punktweise Konvergenz. Also gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_a[\varphi_k] = \delta_a[\varphi].$$

Die δ -Distribution, aufgefasst als Abbildung $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$, ist also eine temperierte Distribution.

3. Wir berechnen die Fouriertransformierte der δ -Distribution: es ist für jede temperierte Funktion $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\widehat{\delta}_a[\varphi] = \delta_a[\widehat{\varphi}] = \widehat{\varphi}(a) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i\langle x, a \rangle} dx = T_{e_{-a}}[\varphi],$$

wobei wir für $a \in \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$x \mapsto e_a(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{i\langle x, a \rangle}.$$

eingeführen. Es ist $e_a \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ als stetige Funktion. Die Fourier-Transformierte der nicht regulären Distribution δ_a ist also die reguläre Distribution $T_{e_{-a}}$. Speziell für $a = 0$ ist

$$\widehat{\delta}_0 = e_0, \text{ d.h. } \widehat{\delta}_0 = T_{e_0} \text{ mit der konstanten Funktion } e_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}.$$

Bemerkungen 2.2.19.

Wir notieren noch abschließend die folgenden Sachverhalte, für deren Beweis wir auf [J] verweisen:

1. Analog zur Rechenregel 2.2.5.3 ist für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ die Distribution $\widehat{\partial}_\alpha T$ für $T \in \mathcal{S}'$ gegeben durch das Produkt der Funktion $x \mapsto i^{|\alpha|} x^\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ mit der Distribution \widehat{T} .
2. Es gilt die Inversionsformel

$$\widehat{\widehat{T}}[\varphi] = \check{T}[\varphi] := T[\check{\varphi}] \text{ mit } \check{\varphi}(x) := \varphi(-x) \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{S},$$

ohne dass man wie in Satz 2.2.8 voraussetzen muss, dass man $\widehat{\widehat{T}}$ überhaupt bilden kann, denn für jede temperierte Distribution $T \in \mathcal{S}'$ ist ja auch wieder ihre Fouriertransformierte $\widehat{T} \in \mathcal{S}'$.

3. Damit erhält man im Fall der Delta-Distribution aus

$$\delta_0 = \widehat{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}}$$

die Identität für jede Schwartz-Funktion φ

$$\delta_0[\varphi] = T_{(2\pi)^{-n/2}}[\widehat{\varphi}] = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{e^{-i\langle x, \xi \rangle} \varphi(x)}_{\notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} dx \right) d\xi.$$

4. Die Fourier-Transformation $\widehat{\cdot}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus des Raums der temperierten Distributionen. Es gilt für jede Folge $T_k \in \mathcal{S}'$:

$$T_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} T \iff \widehat{T}_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} \widehat{T}.$$

2.3 Einige Bemerkungen zu Funktionenräumen

Wir betrachten Räume von Funktionen $f: A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, die auf einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert sind. Wir erinnern daran, dass wir bei der Betrachtung von Fourierreihen Funktionen auf $A = [0, 2\pi]$ entwickelt haben und dabei die Norm

$$\|f\|_2^2 := \int_A |f|^2$$

auf dem Vektorraum V der 2π -periodischen Funktionen, die über dem Intervall $[0, 2\pi]$ (Riemann-)integrierbar sind, und die Konvergenz im quadratischen Mittel betrachtet haben.

Wir erklären nun die Banachräume der L^p -Funktionen. Im Fall $p = 2$ werden wir sogar einen Hilbertraum erhalten.

Definition 2.3.1

Für jede reelle Zahl $p \geq 1$ erklären wir bezüglich einer σ -kompakten Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ die L^p -Halbnorm einer lokal-integrierbaren Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ wie folgt:

$$\|f\|_p := \left(\int_A |f|^p dx \right)^{1/p},$$

wobei wir $\sqrt[p]{\infty} := \infty$ setzen.

Bemerkungen 2.3.2.

1. Für $p = 1$ erhalten wir wegen Satz 1.2.5 die bekannte L^1 -Halbnorm.
2. Im Fall $p = 2$ rührt die Halbnorm von der Sesquilinearform

$$\langle f, g \rangle := \int_A \bar{f} \cdot g dx$$

her: $\langle f, f \rangle = \|f\|_2^2$.

3. Es ist offensichtlich, dass $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.
4. Die Halbnorm mit $p > 1$ wertet für Funktionen mit $\|f\|_p < \infty$ die Teile mit $|f| < 1$ weniger stark, die mit $|f| > 1$ dagegen stärker als die L^1 -Halbnorm.

Als Beispiel betrachte die Funktion $f(x) = x^\alpha$ auf der Teilmenge $A = (1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $\|f\|_p < \infty$, wenn für das Integral

$$\int_1^\infty x^{\alpha p} dx < \infty$$

gilt. Das ist für $\alpha p < -1$ oder, äquivalent, für $\alpha < -\frac{1}{p}$ der Fall. Wir sehen etwa für $f(x) = x^{-1}$ mit $\alpha = -1$ gilt

$$\|f\|_2 < \infty \text{ aber } \|f\|_1 = \infty.$$

Für $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ auf $A = (0, 1)$ ist

$$\|f\|_1 < \infty \quad \text{während} \quad \|f\|_2 = \infty.$$

Um die Dreiecksungleichung für die Halbnorm $\|\cdot\|_p$ zu zeigen, brauchen wir die Höldersche Ungleichung:

Lemma 2.3.3 (Höldersche Ungleichung).

Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Seien f, g Funktionen auf \mathbb{R}^n mit $\|f\|_p < \infty$ und $\|g\|_q < \infty$. Dann gilt

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Man beachte, dass dies im Fall $p = 2$ (und $q = 2$) die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für die Sesquilinearform aus Bemerkung 2.3.2.3 und die $\|\cdot\|_2$ -Norm ergibt.

Beweis.

- Wir können $f \geq 0$ und $g \geq 0$ voraussetzen. Aus $\|f\|_p = 0$ folgt mit Bemerkung 1.3.22.3, dass $f = 0$ fast überall und somit auch $f \cdot g = 0$ fast überall gilt. In diesem Fall gilt die Höldersche Ungleichung trivialerweise. Wir setzen daher nun $0 < \|f\|_p < \infty$ und $0 < \|g\|_q < \infty$ voraus und setzen

$$\varphi := \frac{f^p}{\|f\|_p^p} \text{ und } \psi := \frac{g^q}{\|g\|_q^q}.$$

Dann ist

$$\int_A \varphi = \int_A \psi = 1.$$

- Wir zeigen zunächst für reelle Zahlen $a > 0$ und $b > 0$ die folgende Ungleichung:

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Für $x > 0$ ist wegen $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ der Logarithmus konkav, also gilt für beliebige reelle Zahlen $a, b > 0$

$$\frac{1}{p} \ln a + \frac{1}{q} \ln b \leq \ln\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right).$$

Hierauf wenden wir die Exponentialfunktion an; da diese monoton ist, finden wir

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Daraus folgt mit $a = \varphi(x)$ und $b = \psi(x)$ für jedes $x \in A$ die punktweise Ungleichung

$$\frac{fg}{\|f\|_p \|g\|_q} = \varphi^{1/p} \psi^{1/q} \leq \frac{1}{p} \varphi + \frac{1}{q} \psi,$$

Die Integration dieser Gleichung über A liefert

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_A f \cdot g \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

und somit die Höldersche Ungleichung.

□

Lemma 2.3.4.

Für die L^p -Halbnorm bezüglich $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gelten die folgenden Aussagen:

- (i) $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ fast überall
- (ii) $\|cf\|_p = |c| \cdot \|f\|_p$
- (iii) (Monotonie) $|f| \leq |g| \Rightarrow \|f\|_p \leq \|g\|_p$
- (iv) (Dreiecksungleichung) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
- (v) Ist $v(A) < \infty$, so gilt für jede Funktion f mit $\|f\|_p < \infty$, dass $\|f\|_1 \leq v(A)^{1/q} \cdot \|f\|_p$, wobei $1/p + 1/q = 1$ ist.

Beweis.

- Die ersten beiden Aussagen haben wir schon in Bemerkung 2.3.2 gesehen; die dritte folgt aus der Monotonie des Integrals.
- Zu (iv): Sei $p > 1$. Wir beachten, dass punktweise gilt

$$|f + g| \leq |f| + |g|$$

und $|f + g|^p \leq |f| \cdot |f + g|^{p-1} + |g| \cdot |f + g|^{p-1}$. Ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so gilt $q - \frac{q}{p} = 1$ und somit $pq - q = p$. Wir rechnen nun

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &\stackrel{\text{def}}{=} \int |f + g|^p \leq \int |f| \cdot \underbrace{|f + g|^{p-1}}_{=:h} + \int |g| \cdot |f + g|^{p-1} \\ &= \|f \cdot h\|_1 + \|g \cdot h\|_1 \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|h\|_q \end{aligned}$$

Beachtet man nun mit $q(p - 1) = p$, dass

$$\|h\|_q = \left(\int |f + g|^{q(p-1)} \right)^{1/q} = \left(\int |f + g|^p \right)^{1/q} = \|f + g\|_p^{p/q},$$

so folgt

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|h\|_q = (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f + g\|_p^{p/q}.$$

Wegen $p - \frac{p}{q} = 1$ folgt die Dreiecksungleichung.

- Zu (v): Wenn $v(A) < \infty$ gilt, so folgt

$$\|f\|_1 = \|f \cdot \mathbf{1}_A\|_1 \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\mathbf{1}_A\|_q \cdot \|f\|_p = v(A)^{1/q} \cdot \|f\|_p.$$

□

Definition 2.3.5

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine σ -kompakte Menge und die Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ lokal-integrierbar. Dann heißt f eine L^p -Funktion (und im Fall $p = 2$ quadratintegrierbare Funktion), wenn die Funktion $|f|^p$ integrierbar ist.

Wir führen den Funktionenraum $\mathcal{L}^p(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid f \text{ } L^p\text{-Funktion}\}$ ein.

Bemerkungen 2.3.6.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine σ -kompakte Menge.

1. Eine lokal-integrierbare Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist genau dann eine L^p -Funktion, wenn $\|f\|_p < \infty$ gilt.
2. Wir setzen

$$L^p(U) := \mathcal{L}^p(U)/\mathcal{N} \text{ mit } \mathcal{N} = \{f: U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} | f = 0 \text{ fast überall} \}$$

und versehen diesen Quotientenraum mit der $\|\cdot\|_p$ -Norm.

3. Wie im Beweis von Satz von Riesz-Fischer 1.4.3 zeigt man, dass der normierte Raum $L^p(U)$ vollständig ist, und dass man durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge gleichzeitig punktweise Konvergenz fast überall erreichen kann. Wir haben also für jedes $p \geq 1$ einen Banachraum.
4. Im Fall $p = 2$ ist der normierte Raum $L^2(U)$ sogar ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_U \overline{f(x)}g(x)dx.$$

Dieser Hilbertraum wird in der Quantenmechanik zur Beschreibung von Wellenfunktionen benutzt.

5. Für alle $1 \leq p < \infty$ hat der normierte Vektorraum $L^p(U)$ eine abzählbar dichte Teilmenge. Zum Beispiel bilden Treppenfunktionen $\sum c_k \mathbf{1}_{Q_k}$ mit Werten $c_k \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$ und Quadern $Q_k = \prod [a_i, b_i]$ mit rationalen Koordinaten $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ eine solche Teilmenge. Die (nicht abzählbare) Menge $C_c^\infty(U)$ der glatten Funktionen mit kompaktem Träger liegt ebenfalls dicht in $L^p(U)$.

Bemerkungen 2.3.7.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Jede Funktion in $\mathcal{L}^p(U)$ ist insbesondere lokal integrierbar und definiert daher eine reguläre Distribution und hat eine Ableitung im distributionellen Sinne, die *schwache Ableitung* von f , die wir jetzt mit $D^\alpha f$ bezeichnen.

Das Beispiel der Heavisideschen Sprungfunktion zeigt, dass die schwache Ableitung nicht unbedingt eine reguläre Distribution ist. Wir können aber auf diejenigen Funktionen einschränken, für die dies der Fall ist.

Der Sobolev-Raum $W^{k,p}$ für $p \geq 1$ und $k \in \mathbb{N}$ ist

$$W^{k,p}(U) := \{f \in \mathcal{L}^p(U) | D^\alpha f \in \mathcal{L}^p(U) \text{ für alle Multiindizes } |\alpha| \leq k\}.$$

Mit der Norm

$$\|f\|_{k,p} := \sqrt[p]{\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_p^p}$$

erhält man Banachräume. Für $p = 2$ erhält man einen Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle.$$

Auch in diesen Banachräumen liegt der Unterraum $C_c^\infty(U)$ der glatten Funktionen mit kompakten Träger dicht.

3 Integration auf Mannigfaltigkeiten

3.1 Mannigfaltigkeiten

Wir folgen [F, §14]. Wir erinnern an einige Resultate des letzten Semesters:

Theorem 3.1.1 (MfP2: Allgemeine Abbildungen von konstantem Rang).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^k -Abbildung mit konstantem Rang $\text{rg}(f) = r$ auf U .

Dann existieren für jeden Punkt $p \in U$ offene Umgebungen $V \subseteq U$ des Urbilds p und $W \subseteq \mathbb{R}^n$ des Bilds $f(p)$ und C^k -Diffeomorphismen

$$\varphi: V \rightarrow \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^m \text{ und } \psi: W \rightarrow \psi(W) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

so dass

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r})$$

auf $\varphi(V)$.

Wir erinnern auch an zwei Spezialfälle:

- Gilt $r = n \leq m$, so liegt eine Submersion vor; das Differential von f ist surjektiv.
- Gilt $r = m \leq n$ so liegt eine Immersion vor; das Differential von f ist injektiv.

Definition 3.1.2 (MfP2)

1. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt m -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine C^k -Immersion $\varphi: T \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, die T homöomorph (also bijektiv, stetig, mit stetiger Umkehrabbildung) auf $U \cap M$ abbildet, $\varphi(T) = U \cap M$.
2. Dann heißt φ eine lokale Parametrisierung in p oder auch Karte von M . Wir schreiben $\varphi: T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) \subseteq \mathbb{R}^n$.
3. Zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten heißen Flächen. $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n heißen auch Hyperflächen.
Sprechen wir von einer Untermannigfaltigkeit ohne weiteren Zusatz, so meinen wir eine C^1 -Untermannigfaltigkeit.

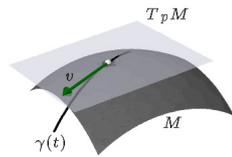
Bemerkung 3.1.3 (MfP2).

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und seien $\varphi_1: T_1 \xrightarrow{\sim} \varphi_1(T_1)$ und $\varphi_2: T_2 \xrightarrow{\sim} \varphi_2(T_2)$ zwei Karten mit $V := \varphi_1(T_1) \cap \varphi_2(T_2) \neq \emptyset$.

Dann sind die Urbild-Mengen $W_j := \varphi_j^{-1}(V)$ offen im \mathbb{R}^k , und es gibt einen Diffeomorphismus $\tau: W_1 \rightarrow W_2$ mit $\varphi_2 \circ \tau = \varphi_1|_{W_1}$.

Definition 3.1.4 (MfP2)

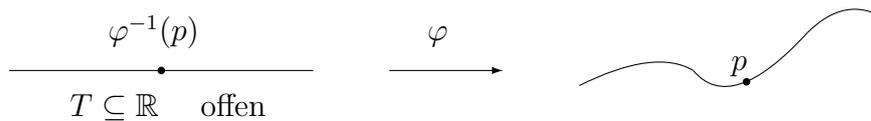
1. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M in p , wenn es ein $\varepsilon > 0$ und eine C^1 -Kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit $\gamma(0) = p$ und $v = \gamma'(0)$.



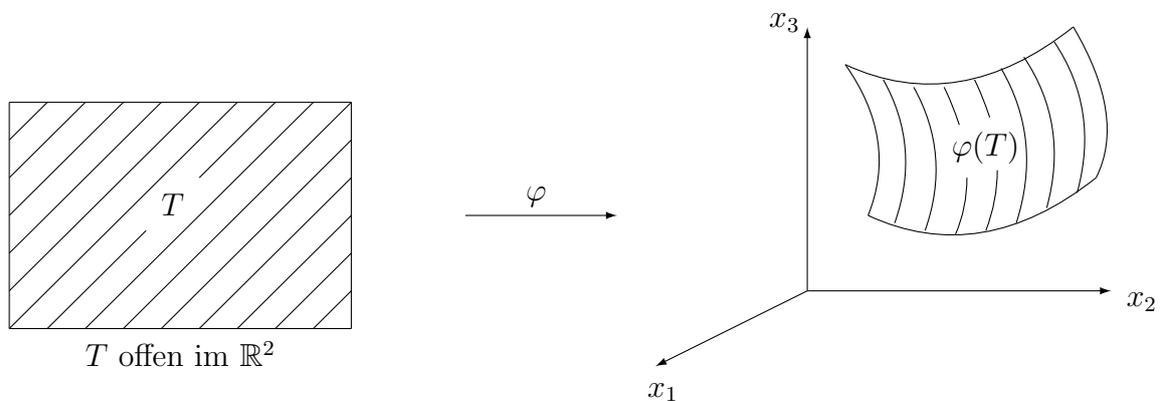
2. Die Menge aller Tangentialvektoren an M in $p \in M$ heißt Tangentialraum und wird mit $T_p M$ bezeichnet.
3. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Normalenvektor einer Untermannigfaltigkeit M in \mathbb{R}^n im Punkt $p \in M$, wenn $v \in N_p M := T_p M^\perp$ gilt. Hierbei ist das orthogonale Komplement bezüglich des euklidischen Standardskalarprodukts des \mathbb{R}^n zu nehmen.

Beispiel 3.1.5.

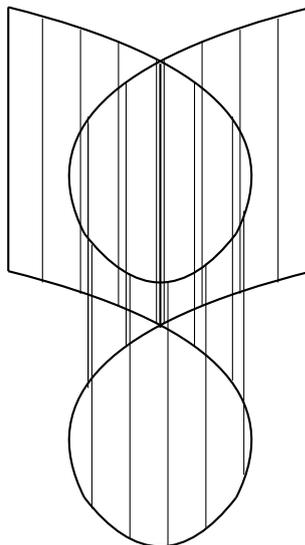
1. Eindimensionale Untermannigfaltigkeiten (Kurven):
Ist $m = 1$ und T ein Intervall, so ist eine Karte von M ein doppelungsfreier, stetig differenzierbarer *parametrisierter Weg* im \mathbb{R}^n , bei dem auch noch für alle $t \in T$ die Ableitung $\varphi'(t) \neq 0$ ist.



2. Zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten (Flächen):
Für $m = 2$ erhalten wir eine *parametrisierte Fläche* (ohne Selbstschnitt) .



So etwas \longrightarrow
 ist dabei nicht zugelassen !



3. Man beachte aber, dass für die globale Beschreibung einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n i.A. nicht nur *eine* Karte genügt. Ein Beispiel dafür ist schon die 2-Sphäre im \mathbb{R}^3 .

Auch die folgenden Sachverhalte sind uns schon bekannt:

Satz 3.1.6 (MfP2: Eigenschaften von Tangential- und Normalraum).

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $T_p M$ der Tangentialraum an M in $p \in M$. Dann gilt:

- $T_p M$ ist ein k -dimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R}^n .
- Sei $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow V$ eine Karte von M , $u \in U$ mit $p = \varphi(u)$. Dann bilden die k Vektoren $\partial_1 \varphi(u), \dots, \partial_k \varphi(u)$ in \mathbb{R}^n eine Basis des Tangentialraums $T_p M$.
- Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von p und $f = (f_1, \dots, f_{n-k}): V \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ eine Submersion, so dass $M \cap V = f^{-1}(q)$, wobei $q = f(p)$. Dann ist $T_p M = \text{Kern}(df_p) = \bigcap_{j=1}^{n-k} (\text{grad} f_j(p))^\perp$.
- Unter den Voraussetzungen in c) wird eine Basis des Normalenraums $N_p M$ gegeben durch

$$\text{grad} f_1(p), \dots, \text{grad} f_{n-k}(p).$$

Wir versehen jetzt Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n mit weiterer Struktur, die auch aus der kanonischen Struktur eines Euklidischen Vektorraums auf \mathbb{R}^n folgt.

Definition 3.1.7

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\varphi: T \xrightarrow{\sim} \varphi(T)$ eine Karte von M . Bezüglich dieser Karte definieren wir eine matrixwertige Funktion auf $T \subseteq \mathbb{R}^k$, deren Einträge die Funktionen $g_{jl}: T \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j, l \leq k$ mit

$$g_{jl}(t) := \langle \partial_j \varphi(t), \partial_l \varphi(t) \rangle$$

sind. Dann heißt die matrixwertige Funktion $G := (g_{jl})$ der Maßtensor bezüglich der Karte φ . Die Funktion $g := \det G$ heißt die Gramsche Determinante von M bezüglich der Karte φ .

Beispiel 3.1.8.

1. Ist $k = n$ und $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, so kann man die Identitätsabbildung

$$\varphi: T \xrightarrow{\sim} \varphi(T), \quad \varphi(t) := t$$

als Karte nehmen. Dann ist $g_{jl}(t) = \delta_{jl}$ für alle j, l und $g(t) = \det \mathbf{1}_n = 1$.

2. Ist $k = 1$ und $T \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\varphi: T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein parametrisierter, stetig differenzierbarer Weg, so hat der Maßtensor nur eine Komponente

$$g_{11}(t) = \langle \partial_1 \varphi(t), \partial_1 \varphi(t) \rangle = \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{d\varphi_\nu(t)}{dt} \right)^2 = \|\varphi'(t)\|^2,$$

und das ist auch die Gramsche Determinante:

$$g(t) = \|\varphi'(t)\|^2.$$

3. Ist $k = 2$ und $n = 3$, also $T \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi: T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) \subseteq \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche, so ist die Gramsche Determinante

$$\begin{aligned} g(t) &= \det \begin{pmatrix} \sum_{\nu=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi_\nu(t)}{\partial t_1} \right)^2 & \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial \varphi_\nu(t)}{\partial t_1} \frac{\partial \varphi_\nu(t)}{\partial t_2} \\ \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial \varphi_\nu(t)}{\partial t_2} \frac{\partial \varphi_\nu(t)}{\partial t_1} & \sum_{\nu=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi_\nu(t)}{\partial t_2} \right)^2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \|\partial_1 \varphi(t)\|^2 & \langle \partial_1 \varphi(t), \partial_2 \varphi(t) \rangle \\ \langle \partial_1 \varphi(t), \partial_2 \varphi(t) \rangle & \|\partial_2 \varphi(t)\|^2 \end{pmatrix} \\ &= \|\partial_1 \varphi(t)\|^2 \|\partial_2 \varphi(t)\|^2 - \langle \partial_1 \varphi(t), \partial_2 \varphi(t) \rangle^2 \\ &= \|\partial_1 \varphi(t) \times \partial_2 \varphi(t)\|^2 \end{aligned}$$

nach den bekannten Eigenschaften des Vektorprodukts. Der Wert der Gramschen Determinante $g(t)$ ist also das Quadrat des Flächeninhalts des Parallelogramms, das von den beiden Tangentialvektoren $\partial_1 \varphi(t)$ und $\partial_2 \varphi(t)$ aufgespannt wird. Allgemeiner zeigt man (siehe [F]), dass für beliebige n, k gilt:

$$g = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (\det d(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}))^2. \quad (3)$$

Insbesondere ist die Gramsche Determinantenfunktion $g(t)$ immer positiv.

Beispiel 3.1.9.

Wir betrachten die Oberfläche einer Kugel mit Radius $R > 0$ im \mathbb{R}^3 , und die folgende Karte aus Kugelkoordinaten, die nur einen ‘Meridian’ auf der Kugel auslässt:

$$\Phi: (-\pi; \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\Phi(\varphi, \vartheta) := (R \cos \varphi \cos \vartheta, R \sin \varphi \cos \vartheta, R \sin \vartheta).$$

In diesem Fall erhält man

$$\partial_1 \Phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \cos \vartheta \\ R \cos \varphi \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_2 \Phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \sin \vartheta \\ -R \sin \varphi \sin \vartheta \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Die beiden Tangentialvektoren sind orthogonal. Es gilt $\|\partial_1 \Phi\|^2 = R^2 \cos^2 \vartheta$ und $\|\partial_2 \Phi\|^2 = R^2$ und somit für die Gramsche Determinante

$$g(\varphi, \vartheta) = R^4 \cos^2 \vartheta > 0.$$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und seien $\varphi, \tilde{\varphi}$ zwei Karten mit $\text{im } \varphi \cap \text{im } \tilde{\varphi} \neq \emptyset$.

Wir nehmen an, dass die Karten das gleiche Bild haben,

$$\varphi: T \xrightarrow{\sim} V, \quad \tilde{\varphi}: \tilde{T} \xrightarrow{\sim} V,$$

indem wir gegebenenfalls den Definitionsbereich der Karten verkleinern. Aus der Bemerkung 3.1.3 folgt, dass es einen Diffeomorphismus $\tau: \tilde{T} \rightarrow T$ gibt mit $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \tau$.

Lemma 3.1.10.

Dann gilt für die Gramschen Determinanten g und \tilde{g} bezüglich der Karten φ bzw. $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{g}(\xi) = |\det(d\tau(\xi))|^2 g(\tau(\xi)),$$

wobei wir die Variablen in \tilde{T} mit ξ_1, \dots, ξ_k bezeichnen.

Beweis.

Es gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_\nu}{\partial \xi_l}(\xi) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t_i}(\tau(\xi)) \frac{\partial \tau_i}{\partial \xi_l}(\xi)$$

und somit für den Maßtensor \tilde{G} bezüglich der Karte $\tilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{lm}(\xi) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \frac{\partial \tilde{\varphi}(\xi)}{\partial \xi_l}, \frac{\partial \tilde{\varphi}(\xi)}{\partial \xi_m} \right\rangle \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{\nu=1}^n \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t_i} \frac{\partial \tau_i}{\partial \xi_l} \right) \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t_j} \frac{\partial \tau_j}{\partial \xi_m} \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial \tau_i}{\partial \xi_l} \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t_i} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t_j} \right) \frac{\partial \tau_j}{\partial \xi_m} \\ &= \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial \tau_i}{\partial \xi_l} g_{ij}(\tau(\xi)) \frac{\partial \tau_j}{\partial \xi_m} \end{aligned}$$

□

Wir können nun eine Integrationstheorie auf Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n entwickeln.

Betrachtung 3.1.11.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. Wir nehmen erst vereinfachend an, dass es eine einzige Karte $\varphi: T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) =: V \subseteq M$ gibt, so dass $f|_{M \setminus V} = 0$.

Dann heißt f *integrierbar über M* , falls die Funktion $t \mapsto f(\varphi(t))\sqrt{g(t)}$ über $T \subseteq \mathbb{R}^k$ integrierbar ist. Hier ist wieder g die Gramsche Determinante bezüglich der Karte φ . Man setzt dann

$$\int_M f(x) dS(x) := \int_T f(\varphi(t)) \sqrt{g(t)} d^k t$$

und nennt $dS(x) = \sqrt{g(t)} d^k t$, mit $x = \varphi(t)$, das *k -dimensionale Flächenelement* von M bezüglich der Karte φ .

2. Wir wollen zeigen, dass der Wert des Integrals nicht von der Wahl der Karte abhängt. Sei $\tilde{\varphi}: \tilde{T} \xrightarrow{\sim} \tilde{V}$ eine weitere Karte mit der gleichen Eigenschaft. Nach Verkleinerung können wir $\tilde{V} = V$ annehmen. Mit Hilfe des Transformationssatzes 1.5.10 und Lemma 3.1.10 rechnet man

$$\int_T f(\varphi(t))\sqrt{g(t)}d^k t \stackrel{1.5.10}{=} \int_{\tilde{T}} f(\varphi(\tau(\xi)))|\det(d\tau(\xi))|\sqrt{g(\tau(\xi))}d^k \xi$$

$$\stackrel{3.1.10}{=} \int_{\tilde{T}} f(\tilde{\varphi}(\xi))\sqrt{\tilde{g}(\xi)}d^k \xi$$

3. Wir werden vereinfachend nur den Fall behandeln, dass es endliche viele Karten $\varphi_j: T_j \xrightarrow{\sim} \varphi_j(T_j) =: V_j \subseteq M$ mit $j = 1, \dots, m$ gibt, die die Untermannigfaltigkeit M überdecken, $M = \bigcup_j V_j$.

Wir wählen eine der gegebenen Überdeckung (V_j) untergeordnete lokal-integrierbare Teilung der Eins, d.h. Funktionen $\alpha_j: M \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, mit:

- (i) $\alpha_j|_{M \setminus V_j} = 0$ und $0 \leq \alpha_j(x) \leq 1$ für $x \in M$
- (ii) $\sum_{j=1}^m \alpha_j(x) = 1$ für alle $x \in M$
- (iii) die Funktionen $t \mapsto \alpha_j(\varphi_j(t))$ sind über T_j lokal-integrierbar.

Eine solche Teilung ist z.B. durch die charakteristischen Funktionen der Mengen $W_j := V_j \setminus \bigcup_{i < j} V_i$ gegeben. Die Teilung der Eins ist aber nicht eindeutig.

Dann heißt f *integrierbar über M* , falls alle Einschränkungen $f|_{V_j}$ im Sinn von 1. über V_j integrierbar sind. Man setzt dann

$$\int_M f(x)dS(x) := \sum_{j=1}^m \int_M \alpha_j(x)f(x)dS(x).$$

4. Dieses Integral ist wohldefiniert, und es ist unabhängig von der integrierbaren Überdeckung von M und der Teilung der Eins.

Beispiel 3.1.12 (Spezialfälle des Flächenelements).

Wir hatten in Beispiel 3.1.8 schon die Gramsche Determinante in Spezialfällen ausgerechnet. Damit finden wir:

1. Für $k = n$, eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n , erhalten wir einfach

$$dV := d^n t.$$

Hier spricht man für $n \geq 3$ vom *Volumenelement*.

2. Für $k = 1$, also für einen durch ein offenes Intervall T parametrisierten, stetig differenzierbaren Weg, finden wir $\varphi: T \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$ds(t) = \|\varphi'(t)\|d^1 t$$

und sprechen in diesem Fall von einem *Linienelement*. Man schreibt hier auch $ds(t)$ statt $dS(t)$.

3. Ist $k = 2$ und $n = 3$, also betrachten wir eine durch $T \subseteq \mathbb{R}^2$ offen parametrisierte Fläche

$$\varphi: T \xrightarrow{\sim} \varphi(T) \subseteq \mathbb{R}^3$$

mit φ stetig differenzierbar, so ist

$$dS(x) = \|\partial_1\varphi(t) \times \partial_2\varphi(t)\| dt_1 dt_2$$

das *Flächenelement*.

Definition 3.1.13

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $A \subseteq M$.

1. Falls die charakteristische Funktion 1_A über die Untermannigfaltigkeit M integrierbar ist, so heißt A eine messbare Teilmenge der Untermannigfaltigkeit M ;

$$v_k(A) := \int_M 1_A(x) dS(x)$$

heißt das k -dimensionale Volumen von A .

2. Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt über A integrierbar, falls die Funktion $f \cdot 1_A$ über die Untermannigfaltigkeit M integrierbar ist. Man setzt dann

$$\int_A f(x) dS(x) := \int_M f \cdot 1_A(x) dS(x).$$

3. Man nennt A eine k -dimensionale Nullmenge, falls A messbar ist mit $v_k(A) = 0$.

Beispiel 3.1.14.

Sei M wie in Beispiel 3.1.9 die Oberfläche einer Kugel mit Radius R im \mathbb{R}^3 , mit der Karte

$$\Phi: (-\pi; \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow V \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^3,$$

$$\Phi(\varphi, \vartheta) := (R \cos \varphi \cos \vartheta, R \sin \varphi \cos \vartheta, R \sin \vartheta).$$

Nach Beispiel 3.1.9 ist die Gramsche Determinante $\sqrt{g(\varphi, \vartheta)} = R^2 \cos \vartheta$.

Der ‘Meridian’ $N := M \setminus V = \{(-R \cos \vartheta, 0, R \sin \vartheta) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\}$ ist eine 2-dimensionale Nullmenge. Man erhält daher

$$v_2(M) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos \vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi R^2 \sin \vartheta \Big|_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = 4\pi R^2.$$

Insbesondere ist $v_2(S^2) = 4\pi$.

Wir illustrieren die Konzepte in dem folgenden Satz:

Satz 3.1.15.

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und sei $n \geq 2$. Dann ist für fast alle $r \in \mathbb{R}_+$ die Funktion f über die Sphäre

$$S_r^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r\}$$

mit Radius r integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x = \int_0^\infty \left(\int_{S_r^{n-1}} f(x) dS(x) \right) dr = \int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} f(r\xi) dS(\xi) \right) \cdot r^{n-1} dr.$$

Beweis.

- Nach der Transformationsformel für Polarkoordinaten 1.5.15 ist

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x = \int_0^\infty \left(\int_{\Pi^{n-1}} f(P_n(r, \varphi)) \cdot C_n(\varphi) \cdot r^{n-1} d\varphi \right) dr,$$

wobei das Integral in der Klammer nach dem Satz von Fubini 1.5.5 für fast alle $r \in \mathbb{R}_+$ existiert. Dabei ist wie in Bemerkung 1.5.14

$$\Pi^{n-1} := (-\pi; \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)^{n-2}, \quad \varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \text{ und}$$

$$C_n(\varphi) = C_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \cos^0 \varphi_1 \cdot \cos^1 \varphi_2 \cdot \dots \cdot \cos^{n-2} \varphi_{n-1}.$$

- Berechnen wir andererseits das Integral über die Sphäre S_r^{n-1}

$$\int_{S_r^{n-1}} f(x) dS(x)$$

für festen Radius $r > 0$, so können wir

$$\Phi_n: \Pi^{n-1} \longrightarrow S_r^{n-1}, (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \longmapsto P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$$

als Parametrisierung nehmen, denn $S_r^{n-1} \setminus \Phi_n(\Pi^{n-1})$ ist nach Beispiel 3.1.14 eine $(n-1)$ -dimensionale Nullmenge. Wir erhalten nach Betrachtung 3.1.11

$$(**) \quad \int_{S_r^{n-1}} f(x) dS(x) = \int_{\Pi^{n-1}} f(P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})) \sqrt{g^{(n)}(\varphi)} d^{n-1} \varphi,$$

mit dem Maßtensor

$$g_{jl}^{(n)}(\varphi) := \langle \partial_j \Phi_n(\varphi), \partial_l \Phi_n(\varphi) \rangle$$

bezüglich der Karte φ .

- Wir zeigen nun induktiv, dass für $n \geq 2$ für die Gramsche Determinante bezüglich der Parametrisierung Φ_n gilt

$$\sqrt{g^{(n)}(\varphi)} = C_n(\varphi) \cdot r^{n-1}. \quad (***)$$

Induktionsanfang: Für $n = 2$ haben wir die Parametrisierung eines Kreises $S_r^1 \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\Phi_2: (-\pi; \pi) \longrightarrow S_r^1, \varphi_1 \longmapsto P_2(r, \varphi_1) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi_1 \\ r \sin \varphi_1 \end{pmatrix},$$

und somit den Maßtensor

$$g^{(2)}(\varphi_1) \stackrel{3.1.8}{=} \|\Phi_2'(\varphi_1)\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} -r \sin \varphi_1 \\ r \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \right\|^2 = r^2,$$

und

$$\sqrt{g^{(2)}(\varphi_1)} = r = C_2(\varphi_1) \cdot r^1.$$

- Induktionsschritt: Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sei (*) richtig. Dann haben wir für $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ die Jacobische Matrix

$$\Phi'_{n+1}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} \Phi'_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot \cos \varphi_n & -\Phi_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot \sin \varphi_n \\ \hline 0 & r \cdot \cos \varphi_n \end{array} \right)$$

$\in M((n+1) \times n, \mathbb{R})$. Das ist die Jacobische Matrix von $P'_{n+1}(r, \varphi)$ der Koordinatentransformation auf Polarkoordinaten, in der man die Spalte mit den Ableitungen nach r weggelassen hat. Wir bilden nun das Skalarprodukt der n Spalten miteinander: Die Spalten mit Index $j < n$ sind die Spalten von $\Phi'_n(\varphi)$, multipliziert mit $\cos \varphi_n$, und um die 0 unten ergänzt. Also gilt für diese Komponenten des Maßtensors

$$g_{jl}^{(n+1)}(\varphi) = g_{jl}^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cos^2 \varphi_n \text{ für } j, l < n.$$

Es ist wegen $\|P_n(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})\| = r$ das Matrixelement in der rechten unteren Ecke gleich

$$g_{nn}^{(n+1)}(\varphi) = \|\Phi_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})\|^2 \cdot \sin^2 \varphi_n + r^2 \cos^2 \varphi_n = r^2,$$

und für $j < n$:

$$g_{jn}^{(n+1)}(\varphi) = -\left\langle \frac{\partial \Phi_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}{\partial \varphi_j}, \Phi_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \right\rangle \cos \varphi_n \sin \varphi_n.$$

Wendet man auf die einzelnen Summanden des Skalarprodukts die Produktregel in einer Variable an, so erhält man für $j < n$

$$\begin{aligned} g_{jn}^{(n+1)}(\varphi) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \langle \Phi_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}), \Phi_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \rangle \cos \varphi_n \sin \varphi_n \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi_j} (r^2 \cdot \cos \varphi_n \sin \varphi_n) = 0. \end{aligned}$$

Wir finden somit für die Gramsche Determinante

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(\varphi) &= \det \left(\begin{array}{c|c} g_{jl}^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cos^2 \varphi_n & 0 \\ \hline 0 & r^2 \end{array} \right) \\ &= g^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cos^{2(n-1)} \varphi_n \cdot r^2, \end{aligned}$$

Es folgt

$$\sqrt{g^{(n+1)}(\varphi)} = \sqrt{g^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot \cos^{2(n-1)} \varphi_n} \cdot r = C_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \cdot r^{n-1} \cos^{n-1} \varphi_n \cdot r,$$

und nach Bemerkung 1.5.14 ist das gleich $C_{n+1}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \cdot r^n$.

- Damit erhalten wir aus (**) und (***)

$$\int_{S_r^{n-1}} f(x) dS(x) = \int_{\Pi^{n-1}} f(P_n(r, \varphi)) C_n(\varphi) \cdot r^{n-1} d^{n-1} \varphi,$$

und das linke Integral existiert, wenn das rechte existiert. In die Transformationsformel für Polarkoordinaten aus 1.5.15 eingesetzt ergibt das die erste Gleichung der Behauptung:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x = \int_0^\infty \left(\int_{S_r^{n-1}} f(x) dS(x) \right) dr.$$

- Die zweite Gleichung der Behauptung erhält man aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} f(r\xi) dS(\xi) \cdot r^{n-1} &= \int_{\Pi^{n-1}} f(r \cdot P_n(1, \varphi)) \cdot C_n(\varphi) d\varphi \cdot r^{n-1} \\ &= \int_{S_r^{n-1}} f(x) dS(x). \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.1.16.

Wir berechnen nun die Oberfläche $\omega_n := v_{n-1}(S^{n-1})$ der Einheitssphäre im \mathbb{R}^n . Nach Satz 3.1.15 gilt für das Volumen κ_n der Einheitsvollkugel im \mathbb{R}^n

$$\kappa_n = v(B_1^n(0)) = \int_{\|x\| \leq 1} d^n x \stackrel{3.1.15}{=} \int_0^1 \underbrace{\left(\int_{\|\xi\|=1} dS(\xi) \right)}_{\omega_n} r^{n-1} dr = \frac{\omega_n}{n}.$$

Also ergibt sich für die Kugeloberfläche ω_n

$$\omega_n = n \cdot \kappa_n$$

Insbesondere ist $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$, $\omega_4 = 2\pi^2$.

Mit dem Gaußschen Integralsatz kommen wir auf diese Oberfläche noch einmal zurück.

3.2 Der Gaußsche Integralsatz

Wir folgen [F, §15].

Definition 3.2.1

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Wir sagen, A habe glatten Rand, falls es zu jedem Punkt $a \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit den beiden Eigenschaften

1. $A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) \leq 0\}$.
2. $\text{grad } \psi(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Lemma 3.2.2.

Es ist dann $\partial A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) = 0\}$. Insbesondere ist der Rand eines Kompaktums A mit glattem Rand lokal durch eine Gleichung von konstantem Rang 1 gegeben und somit eine kompakte $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .

Beweis.

- Um die Inklusion \subseteq zu zeigen, reicht es aus, zu zeigen, dass jeder Punkt $x \in U$ mit $\psi(x) < 0$ nicht auf dem Rand liegt. Da aber ψ insbesondere stetig sein soll, gibt es für jeden solchen Punkt eine offene Umgebung $V \subseteq U$, auf der ψ negativ ist, also $V \subseteq A$; somit kann ein solches x kein Randpunkt von A sein.

- Für die Inklusion \supseteq betrachte $a \in U$ mit $\psi(a) = 0$. Die Taylorentwicklung liefert für $\nu := \text{grad } \psi(a) \neq 0$ (wegen Voraussetzung 2.):

$$\psi(a + t\nu) = \psi(a) + \langle \text{grad } \psi(a), t\nu \rangle + o(t\nu) = t \|\text{grad } \psi(a)\|^2 + o(t\nu),$$

so dass in jeder Umgebung von a sowohl Punkte von A als auch Punkte im Komplement von A liegen. Also ist $a \in \partial A$.

□

Satz 3.2.3.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $a \in \partial A$. Dann existiert genau ein Vektor $\nu(a) \in \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\nu(a)$ steht senkrecht auf dem Tangentialraum $T_a(\partial A)$ der $(n - 1)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit ∂A .
2. Der Vektor $\nu(a)$ ist ein Einheitsvektor, $\|\nu(a)\| = 1$.
3. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass $a + t\nu(a) \notin A$ für alle $t \in (0, \varepsilon)$ ist.

Man erhält ein stetiges Vektorfeld $\nu: \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \mapsto \nu(a)$.

Beweis.

- Existenz: wähle eine C^1 -Funktion ψ wie in Definition 3.2.1. Wir haben schon gesehen, dass dann

$$\nu(a) := \frac{\text{grad } \psi(a)}{\|\text{grad } \psi(a)\|}$$

alle gewünschten Eigenschaften hat.

- Da der Normalenraum in $a \in \partial A$ eindimensional mit Basis $\text{grad } \psi(a)$ ist, folgt $\nu(a) = \lambda \text{grad } \psi(a)$. Die Normierungsbedingung 2. legt ν bis auf ein Vorzeichen fest; dieses muss wegen Bedingung 3. positiv sein.

□

Definition 3.2.4

Der Vektor $\nu(a)$ heißt äußerer Normalen-Einheitsvektor von A im Punkt a .

Bemerkung 3.2.5.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $a = (a_1, \dots, a_n) \in \partial A$ ein Randpunkt.

In einer Umgebung von a kann der Rand ∂A wie jede $n - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit als Graph einer Funktion von $n - 1$ Variablen dargestellt werden. Als Folgerung des Satzes über implizite Funktionen existieren nach eventuellem Umnummerieren der Koordinaten eine offene Umgebung U' von (a_1, \dots, a_{n-1}) , ein Intervall $I = (\alpha, \beta)$ mit $a_n \in I$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g: U' \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$A \cap (U' \times I) = \{(x', x_n) \in U' \times I \mid x_n \leq g(x')\}$$

(ohne Einschränkung, den Fall $x_n \geq g(x')$ behandelt man analog).

Mit der Funktion $\psi(x) := x_n - g(x')$ berechnet man nun den äußeren Normalen-Einheitsvektor zu

$$\nu = \frac{(-\text{grad } g, 1)}{\sqrt{1 + \|\text{grad } g\|^2}}.$$

Das folgende Lemma bereitet den Gaußschen Integralsatz 3.2.9 vor und ist gleichzeitig ein Spezialfall.

Lemma 3.2.6.

Sei $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I = (\alpha, \beta)$ ein offenes Intervall und $g: U' \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Wir setzen

$$\begin{aligned} A &:= \{(x', x_n) \in U' \times I \mid x_n \leq g(x')\} \\ M &:= \{(x', x_n) \in U' \times I \mid x_n = g(x')\} \end{aligned} \quad \text{mit } x' := (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Dann gilt für jede stetig differenzierbare Funktion $f: U' \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompakten Träger in $U' \times I$ und alle $j = 1, \dots, n$:

$$\int_A \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} d^n x = \int_M f(x) \nu_j(x) dS(x),$$

mit

$$\begin{aligned} \nu_j(x) &:= -\frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad } g(x')\|^2}} \frac{\partial g(x')}{\partial x_j} \quad \text{für } j < n \\ \nu_n(x) &:= \frac{1}{\sqrt{1 + \|\text{grad } g(x')\|^2}}. \end{aligned}$$

Beweis.

- Das Flächenelement bezüglich der Karte $x' \mapsto (x', g(x'))$ von M ist

$$dS(x) = \sqrt{1 + \|\text{grad } g(x')\|^2} d^{n-1}x'.$$

Dies folgt so: Man berechnet

$$d\varphi = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-1} \\ (\text{grad } g(x'))^t \end{pmatrix}$$

und den Maßtensor $G = \mathbf{1}_{n-1} + (\text{grad } g) \cdot (\text{grad } g)^t$ und benutzt dann die Formel

$$\det(\mathbf{1} + a \cdot b^t) = 1 + a^t \cdot b$$

einer ÜA zur linearen Algebra.

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

- Für $1 \leq i \leq n-1$ betrachte die Funktion $F: U' \times I \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x', z) := \int_\alpha^z f(x', x_n) dx_n.$$

Es gilt

$$\frac{\partial F(x', z)}{\partial z} = f(x', z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x', z)}{\partial x_i} = \int_\alpha^z \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', x_n) dx_n$$

wegen des Differentiationssatzes 1.5.3. Damit folgt

$$\begin{aligned} (*) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_n) dx_n &= \frac{\partial}{\partial x_i} F(x', g(x')) \\ &= \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x', x_n) dx_n + f(x', g(x')) \frac{\partial g(x')}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Ferner gilt nach Lemma 2.1.16

$$(**) \quad \int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_{\alpha}^{g(x')} f(x', x_n) dx_n \right) d^{n-1}x' = 0$$

da der Ausdruck in Klammern kompakten Träger in U' hat.

Damit erhalten wir durch Integration von (*) über U'

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} d^n x &= \int_{U'} \left(\int_{\alpha}^{g(x')} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_n \right) d^{n-1}x' \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_{\alpha}^{g(x')} f(x', x_n) dx_n \right) d^{n-1}x' - \int_{U'} f(x', g(x')) \frac{\partial g(x')}{\partial x_i} d^{n-1}x' \\ &\stackrel{(**)}{=} \int_M f(x) \nu_i(x) dS(x), \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Summanden die Definition von ν_i und den Ausdruck für das Flächenelement $dS(x)$ eingesetzt haben.

- Für $i = n$ beachte, dass für jedes $x' \in U$ die Funktion $x_n \mapsto f(x', x_n)$ kompakten Träger in $I = (\alpha, \beta)$ hat. Aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung folgt daher

$$\int_{\alpha}^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', x_n) dx_n = f(x', g(x'))$$

und durch weitere Integration

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} d^n x &= \int_{U'} \left(\int_{\alpha}^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', x_n) dx_n \right) d^{n-1}x' \\ &= \int_{U'} f(x', g(x')) d^{n-1}x' = \int_M f(x) \nu_n(x) dS(x), \end{aligned}$$

wobei wir wieder die Definition von ν_n und den Ausdruck für das Flächenelement $dS(x)$ eingesetzt haben.

□

Lemma 3.2.7 (Lebesguesches Lemma).

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $(U_j)_{j \in I}$ eine offene Überdeckung von A . Dann gibt es eine positive Zahl $\lambda \in \mathbb{R}_+$, die Lebesguesche Zahl der Überdeckung, so dass jede zu A nicht disjunkte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$, die einen Durchmesser $\leq \lambda$ hat, ganz in *einer* der offenen Teilmengen U_j enthalten ist.

Für den Beweis verweisen wir auf [F, §15].

Wir müssen nun noch die lokal-integrierbaren Teilungen der Eins aus Betrachtung 3.1.11 so verbessern, dass sie differenzierbar werden.

Bemerkung 3.2.8 (Beliebig oft differenzierbare Teilung der Eins.).

Wir erinnern an Betrachtung 2.1.8:

- Die Funktion

$$s: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad s(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar.

Die Funktion

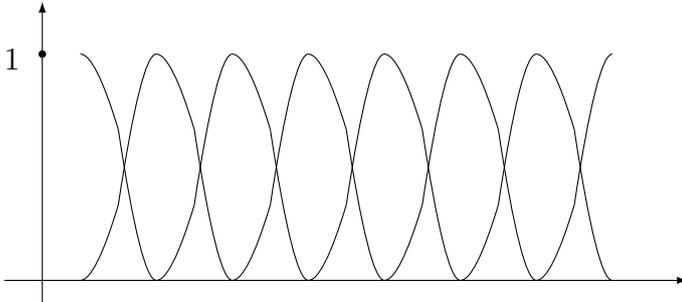
$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } g(t) := s(1+t) \cdot s(1-t),$$

ist glatt mit kompaktem Träger, $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{supp}(g) = [-1, 1]$. Die Funktion g ist nicht-negativ, $g \geq 0$.

- Es ist auch die Funktion

$$G: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, G(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t-k)$$

definiert, denn für jedes $t \in \mathbb{R}$ tragen wegen $\text{supp}(g) = [-1, 1]$ maximal zwei Summanden bei. Die Funktion G ist, wie g , beliebig oft differenzierbar,



Die Funktion G ist nach Konstruktion \mathbb{Z} -periodisch:

$$G(t) = G(t-k) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \quad \text{und für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Sie ist positiv, $G(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir können daher auf \mathbb{R} die Funktion

$$h(t) := \frac{g(t)}{G(t)}$$

betrachten. Dann ist $\text{supp} h = [-1, 1]$, also $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(t-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{g(t-k)}{G(t)} = \frac{1}{G(t)} \cdot G(t) = 1.$$

Wir haben in dieser Weise für jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine Funktion $h_k(t) := h(t-k)$ mit kompaktem Träger gefunden, so dass die Summe der Funktionen für jedes t eine endliche Summe mit Wert Eins ist.

- Analog zur Konstruktion der Funktionen $h(t-k)$ zu $k \in \mathbb{Z}$ funktioniert auch eine Konstruktion im \mathbb{R}^n zu $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$, wobei wir noch durch Reskalieren erreichen können, dass der Durchmesser des Trägers kleiner als eine vorgegebene Schranke wird:

Wir betrachten dazu die Funktion

$$G_\epsilon(x) := \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} \prod_{j=1}^n g\left(\frac{x_j}{\epsilon} - q_j\right).$$

Nun ist $g\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - q_j\right) > 0$ genau für $\frac{x_j}{\varepsilon} \in (q_j - 1; q_j + 1)$. Also ist die Summe wieder lokal endlich. Wie im eindimensionalen Fall folgt aus $g \geq 0$, dass G_ε positiv ist, $G_\varepsilon > 0$ und dass G_ε beliebig oft differenzierbar ist.

Daher können wir für $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $\varepsilon > 0$ die Funktionen

$$\alpha_{p,\varepsilon}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\alpha_{p,\varepsilon} := \frac{1}{G_\varepsilon(x)} \prod_{j=1}^n g\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - p_j\right)$$

betrachten.

- Wir fassen zusammen: zu jedem gegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es für alle $p \in \mathbb{Z}^n$ Funktionen

$$\alpha_{p,\varepsilon}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

so dass gilt

1. Die Funktion $\alpha_{p,\varepsilon}$ ist beliebig oft differenzierbar.
2. Für die Summe gilt $\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{p,\varepsilon}(x) = 1$, an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}^n$.
3. Für den Träger gilt $\text{supp} \alpha_{p,\varepsilon} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x_j - p_j \varepsilon| \leq \varepsilon \text{ für alle } j \}$; er ist also ein Würfel mit Kantenlänge 2ε und Durchmesser $2\varepsilon\sqrt{n}$.

Wir nennen die Familie von Funktionen $(\alpha_{p,\varepsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$ eine feine beliebig oft *differenzierbare Teilung der Eins*.

Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$F: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

hatten wir die *Divergenz* $\text{div } F := \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j}$ definiert.

Theorem 3.2.9 (Gaußscher Integralsatz).

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, $\nu: \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Einheits-Normalenfeld und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $A \subseteq U$. Sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = \sum_{j=1}^n F_j e_j$, ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\int_A \text{div } F(x) d^n x = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x).$$

Beweis.

- Nach Bemerkung 3.2.5 kann man den Rand ∂A in der Umgebung jedes Punktes als Graph einer Funktion von $n - 1$ Variablen schreiben. Deshalb gibt es eine Familie offener Teilmengen $(U_i)_{i \in I}$ mit $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$, die A überdecken, $\cup_{i \in I} U_i \supset A$, so dass für jedes $i \in I$ eine der beiden Bedingungen erfüllt ist:

1. Entweder liegt U_i im Innern von A , also $U_i \subseteq A \setminus \partial A$.

2. oder nach Ummumerierung der Koordinaten hat U_i die Gestalt $U_i = U' \times (a, b)$ mit $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, und es gibt eine stetig differenzierbare Funktion

$$g: U' \rightarrow \mathbb{R}$$

mit (ohne Einschränkung):

$$U_i \cap A = \{(x', x_n) \in U' \times (a, b) \mid x_n \leq g(x')\}.$$

- Sei $\lambda > 0$ eine Lebesguesche Zahl für die Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von A wie in Lemma 3.2.7. Wir setzen $\epsilon := \lambda/2\sqrt{n}$ und betrachten die in Bemerkung 3.2.8 konstruierte differenzierbare Teilung der Eins $(\alpha_{p\epsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$. Der Träger jeder Funktion $\alpha_{p\epsilon}$ ist ein Würfel der Seitenlänge 2ϵ , hat also Durchmesser kleiner als λ . Sei P die endliche Menge aller Multiindizes $p \in \mathbb{Z}^n$, so dass $\text{supp}(\alpha_{p,\epsilon}) \cap A \neq \emptyset$. Dann ist wegen der Linearität der Ausdrücke

$$\int_A \text{div} F(x) d^n x = \sum_{p \in P} \int_A \text{div} (\alpha_{p,\epsilon}(x) F(x)) d^n x$$

und

$$\int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x) = \sum_{p \in P} \int_{\partial A} \langle \alpha_{p,\epsilon}(x) F(x), \nu(x) \rangle dS(x).$$

Der Satz braucht also nur für die Funktionen $\alpha_{p,\epsilon}(x) F(x)$ bewiesen werden.

- Nach Konstruktion ist aber $\text{supp}(\alpha_{p,\epsilon})$ für jedes $p \in P$ ganz in einer Kartenumgebung U_i enthalten. Falls $U_i \subseteq A \setminus \partial A$, so folgt die Gleichung

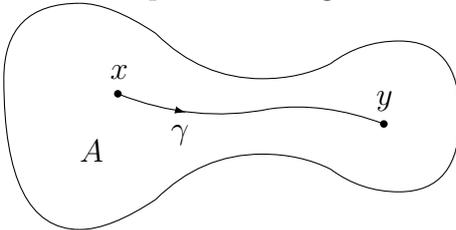
$$\int_A \text{div} (\alpha_{p,\epsilon}(x) F(x)) d^n x = \int_{\partial A} \langle \alpha_{p,\epsilon} F(x), \nu(x) \rangle dS(x)$$

aus Lemma 2.1.16.1, da das Randintegral entfällt. Falls aber U der Bedingung 2. genügt, so ist die Gleichheit der Integrale eine Folge von Lemma 3.2.6, angewandt auf die Komponenten der vektorwertigen Funktion $\alpha_{p,\epsilon} F$, über die man dann summiert.

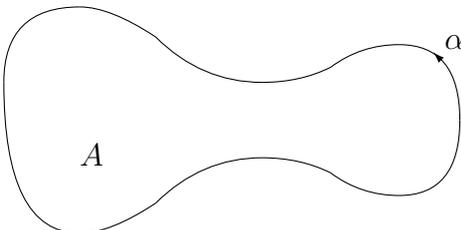
□

Beispiel 3.2.10.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt und wegzusammenhängend.



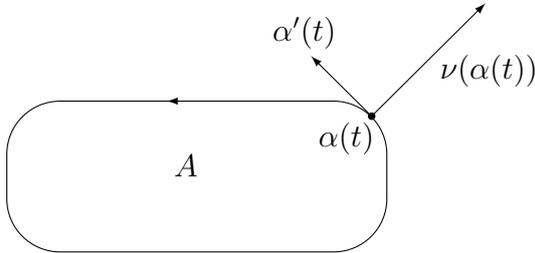
Hat A glatten Rand, so kann man ∂A durch einen einzigen stetig differenzierbaren Weg $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\alpha'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ parametrisieren, und zwar so, dass α um die Punkte aus A einmal im mathematisch positiven Sinn herumläuft.



Für $t \in [a, b]$ ist $\alpha'(t)$ nach Satz 3.1.6 ein Tangentialvektor an die parametrisierte Kurve α , also an den Rand ∂A . Es folgt sofort, dass

$$\nu(\alpha(t)) := + \frac{(\alpha'_2(t), -\alpha'_1(t))}{\|\alpha'(t)\|}$$

der äußere Einheits-Normalenvektor an ∂A ist.



Sei nun $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein auf einer offenen Menge U mit $A \subseteq U$ stetig differenzierbares Vektorfeld, dann führen wir auf U als Hilfsgröße ein weiteres Vektorfeld

$$K: U \rightarrow \mathbb{R}^2, K(x) := (F_2(x), -F_1(x))$$

ein und wenden darauf den Satz von Gauß 3.2.9 im \mathbb{R}^2

$$\int_A \operatorname{div} K(x) d^2x = \int_{\partial A} \langle K(x), \nu(x) \rangle dS(x),$$

an:

$$\begin{aligned} \int_A \left(\frac{\partial}{\partial x_1} F_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} F_1(x) \right) dx_1 dx_2 &= \int_{[a,b]} \langle K(\alpha(t)), \nu(\alpha(t)) \rangle \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_a^b (F_2(\alpha(t)) \cdot \alpha'_2(t) + F_1(\alpha(t)) \cdot \alpha'_1(t)) dt \\ &= \int_a^b \langle F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ hatten wir die Rotation definiert als das Vektorfeld

$$(\operatorname{rot} F)(x) := \left(\frac{\partial F_3(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} \right).$$

Mit Hilfe des *vektoriellen Linienelements* $d\vec{s}(t) := \alpha'(t) dt$ erhalten wir also

$$\int_A \operatorname{rot}_3(F) dS = \int_A \left(\frac{\partial}{\partial x_1} F_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} F_1(x) \right) dx_1 dx_2 = \int_{\partial A} \langle F(s), d\vec{s} \rangle.$$

Dabei haben wir jetzt “ \int ” für das Integral über den Rand von A geschrieben und meinen mit “ ∂A ” den orientierten Rand, also den Randweg

$$\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

der einmal im mathematisch positiven Sinn um die Punkte von A herumläuft.

Dies ist der *Satz von Green* für glatt berandete, wegzusammenhängende kompakte Teilmengen des \mathbb{R}^2 . Er ist ein Spezialfall des Stokesschen Integralsatzes, den wir später in allgemeinerer Formulierung behandeln.

Allgemein gilt für Vektorfelder in *drei* Dimensionen:

Satz 3.2.11. [Klassischer Stokesscher Integralsatz]

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Sei $M \subseteq U$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, die durch ein Einheitsnormalenfeld $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ orientiert sei. Sei $A \subseteq M$ kompakt mit glattem Rand. Die induzierte Orientierung des Randes ∂A definiert ein vektorielles Linienelement $d\vec{s}$. Dann gilt

$$\int_{\partial A} \langle F, d\vec{s} \rangle = \int_A \langle \operatorname{rot} F(x), \nu(x) \rangle dS(x).$$

Bemerkungen 3.2.12.

1. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ weiterhin kompakt und wegzusammenhängend. Die Voraussetzung eines glatten Randes im Satz von Gauß und im Satz von Green schließt schon Rechtecke und Quader aus. Es ist daher sinnvoll, die Voraussetzungen etwas abzuschwächen, und Kompakta mit "stückweise glattem Rand" zuzulassen. Wir sprechen von *zulässigen kompakten Mengen*.
2. Wir skizzieren dies für $n = 2$: Für jedes $\varepsilon > 0$ gebe es ein Kompaktum $A^{(\varepsilon)}$ mit glattem Rand und stetig differenzierbarem Randweg

$$\alpha^{(\varepsilon)}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ also } \partial A^{(\varepsilon)} = \{\alpha^{(\varepsilon)}(t) | t \in [a, b]\},$$

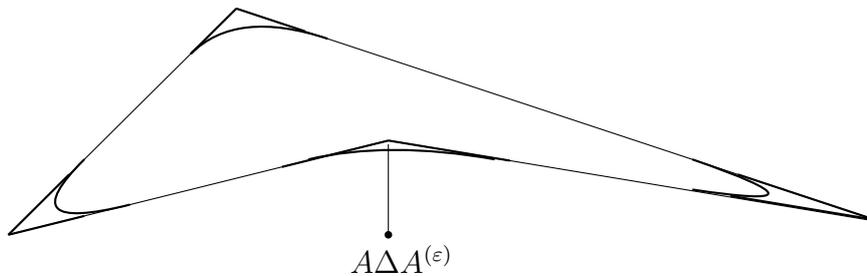
während der Rand $\partial A = \{\alpha(t) | t \in [a, b]\}$ gegeben ist durch einen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Dies kann man so einrichten, dass gilt:

- (a) Sei für zwei Teilmengen B, C einer Menge die *symmetrische Differenz*

$$B \Delta C := (B \setminus C) \cup (C \setminus B).$$

Dann fordern wir $v_2(A \Delta A^{(\varepsilon)}) < \varepsilon$:



- (b) Die Gesamtlänge der in $\partial A \Delta \partial A^{(\varepsilon)}$ auftretenden Kurven ist kleiner als ε .

Dann ersetzen wir in der Aussage des Integralsatzes im Randintegral $\int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS(x)$ den Rand ∂A durch den glatten Rand $\partial A^{(\varepsilon)}$ bzw. durch den glatten Teil von ∂A .

3. Wenden wir den Gaußschen Integralsatz auf das Vektorfeld $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $F(x) = x$ an, so folgt aus $\operatorname{div} F(x) = n$ erneut wie in Beispiel 3.1.16 für das Volumen κ_n der Vollkugel $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\kappa_n = \int_{B_1(0)} 1 d^n x = \frac{1}{n} \int_{B_1(0)} \operatorname{div} F(x) d^n x \stackrel{3.2.9}{=} \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \langle x, \nu(x) \rangle dS(x) = \frac{1}{n} \omega_n,$$

wobei ω_n das $(n - 1)$ -dimensionale Volumen der Einheitskugel im \mathbb{R}^n ist.

Wir brauchen später auch das folgende

Korollar 3.2.13.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Teilmenge mit glattem Rand. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, die \bar{A} enthält. Seien $u, v \in C^1(U)$. Wir schreiben abkürzend für die partiellen Ableitungen:

$$u_i := \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Dann gilt für alle $i = 1, \dots, n$:

1. Der Satz von Gauß 3.2.9 komponentenweise:

$$\int_A u_i d^n x = \int_{\partial A} u \nu_i dS,$$

wobei ν_i die Komponenten des äußeren Normaleneinheitsvektors sind.

2. Die partielle Integrationsformel:

$$\int_A u_i v d^n x = - \int_A u v_i d^n x + \int_{\partial A} u v \nu_i dS.$$

Seien nun $u, v \in C^2(\bar{U})$. Dann gelten die *Greenschen Formeln*:

- 3.

$$\int_A \langle \text{grad } u, \text{grad } v \rangle d^n x = - \int_A u \Delta v d^n x + \int_{\partial A} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS$$

mit der Normalenableitung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \text{grad } u, \nu \rangle = \sum u_i \nu_i$.

- 4.

$$\int_A \Delta u d^n x = \int_{\partial A} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \quad \text{und} \quad \int_A (u \Delta v - v \Delta u) d^n x = \int_{\partial A} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.$$

Beweis.

1. Wurde schon im Beweis des Gaußschen Satzes 3.2.9 gezeigt, vgl. Lemma 3.2.6.
2. Man wende 1. auf die Funktion $u \cdot v$ an.
3. Man ersetze in 2. die Funktion v durch die partiellen Ableitung v_i und erhalte

$$\int_A u_i v_i d^n x = - \int_A u v_{ii} d^n x + \int_{\partial A} u v_i \nu_i dS;$$

summiere dann über i .

4. Man ersetze in 1. die Funktion u durch u_i . Dann erhält man

$$\int_A u_{ii} d^n x = \int_{\partial A} u_i \nu_i dS;$$

diese Gleichung summiert man dann noch über i . Um die letzte Gleichheit zu zeigen, vertausche man noch die Rollen von u und v in 3. und ziehe die Ausdrücke von einander ab.

□

4 Partielle Differentialgleichungen

4.1 Grundlegende Definitionen

Definition 4.1.1

Seien $G \subseteq \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^{2n+1+n^2}$ offene und wegzusammenhängende Teilmengen. Sei

$$F: U \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion. Sei u eine zweimal partiell differenzierbare Funktion

$$u: G \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto u(x).$$

Zur Abkürzung schreiben wir für die partiellen Ableitungen:

$$u_{x_j} = u_j := \frac{\partial u}{\partial x_j}, \text{ und } u_{x_j x_k} = u_{jk} := \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \text{ usw.}$$

1. Dann heißt die Funktion u eine Lösung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(*) \quad F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots, u_{x_n x_n}) = 0,$$

wenn gilt

- (a) $(x_1, \dots, x_n, u(x), u_{x_1}(x), \dots, u_{x_n x_n}(x)) \in U$ für alle $x \in G$,
- (b) $F(x_1, \dots, x_n, u(x), u_{x_1}(x), \dots, u_{x_n x_n}(x)) = 0$ für alle $x \in G$.

2. Ein Spezialfall der allgemeinen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (*) ist die Gleichung

$$(*') \quad A(u) + h = 0 \quad \text{mit} \quad A(u) := \sum_{j,k=1}^n a_{jk} u_{x_j x_k}.$$

Diese Gleichung heißt

- i) quasilinear, falls a_{jk} und h Funktionen in den $2n + 1$ Variablen $x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}$ sind;
- ii) semilinear oder fastlinear, falls die a_{jk} Funktionen allein von x sind und h eine Funktion wie unter i) ist;
- iii) linear, falls h von der Form $h = \sum_{j=1}^n a_j u_{x_j} + au + f$ ist und die a_{jk} , die a_j , a und f Funktionen von x allein sind;
- iv) linear mit konstanten Koeffizienten, falls die Funktionen a_{jk} , a_j und a überdies konstant sind und f eine Funktion von x allein ist.

Eine Differentialgleichung heißt voll nicht-linear, falls sie nicht-linear von den höchsten Ableitungen abhängt.

Nur mit dem einfachsten Fall linearer Differentialgleichungen wollen wir uns im Folgenden beschäftigen. Wir bemerken, dass man vorsichtig bei den Voraussetzungen an die Differenzierbarkeit und Stetigkeit einer Lösung sein soll. Zum Beispiel muss man bei der Betrachtung von Schockwellen auch Lösungen mit Unstetigkeitsstellen zulassen, um physikalisch relevante Phänomene zu beschreiben.

Betrachtung 4.1.2.

Um eine eindeutige Lösung zu haben, muss man bei gewöhnlichen Differentialgleichungen Anfangsbedingungen oder Randbedingungen vorschreiben. Auch bei partiellen Differentialgleichungen möchte man in der Regel solche Probleme behandeln, bei denen folgende Forderungen erfüllt sind:

1. *Eindeutigkeitsforderung*: Es gibt höchstens eine Lösung u , die alle gestellten Bedingungen erfüllt.
2. *Existenzforderung*: Es gibt mindestens eine solche Lösung.
3. *Forderung der stetigen Abhängigkeit von den Parametern*:
Lassen sich Anfangs- bzw. Randwerte nur durch Messungen bestimmen, so möchte man, dass die Auswirkung von Messfehlern auf die Lösungen klein sind: Wird etwa die Bedingung gestellt, dass die Lösungsfunktion u auf dem Rand von G einen bestimmten Werteverlauf hat, so wird gefordert, dass die Lösungsfunktion u stetig von den Randwerten abhängt. (Diese Bedingung ist auch wichtig für die numerische Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen.)

Beispiel 4.1.3.

1. Die n -dimensionale *Laplace-Gleichung* oder auch *Potentialgleichung*:

$$\Delta_n u := u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n} = 0.$$

2. Die m -dimensionale *Wellengleichung*

$$\Delta_m u = c^{-2} u_{tt} \text{ mit } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Man beachte, dass hier die Zahl n der Variablen aus Definition 4.1.1 gleich $m + 1$ ist; die $(m + 1)$ -te Variable ist $t := x_n$.

Macht man in der Wellengleichung den *Separationsansatz* oder *Produktansatz*

$$u(x, t) = e^{i\omega t} v(x)$$

mit einer nur von x abhängigen Funktion v , so erhält man wegen

$$c^{-2} u_{tt} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 e^{i\omega t} v$$

für u die *Helmholtz-Gleichung*

$$-\Delta_m u = \lambda u \text{ mit } \lambda = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \in \mathbb{C}.$$

Die Helmholtz-Gleichung ist eine Eigenwertgleichung für den Laplace-Operator.

3. Die m -dimensionale *Wärmeleitungsgleichung*

$$\Delta_m u = c u_t \text{ mit } c \in \mathbb{C}.$$

Oft fordert man für die Wärmeleitungsgleichung $c \in \mathbb{R}_+$.

Der Fall $c \in i\mathbb{R}$ ist die *Schrödinger-Gleichung*.

Bemerkung 4.1.4.

- Wenn nur Lösungen $u \in C^2(G)$ einer linearen Differentialgleichung gesucht werden, für die dann also

$$u_{x_j x_k} = u_{x_k x_j}$$

für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$ gilt, so kann man die Koeffizientenfunktionen in $A(u)$ so zusammenfassen, dass $a_{jk} = a_{kj}$ gilt. Wir können dann voraussetzen, dass die Matrix $A = (a_{jk})$ symmetrisch ist.

- Für symmetrische Matrizen gibt es nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz eine invertible Matrix $S \in GL(n, \mathbb{R})$, so dass

$$S \cdot A \cdot S^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

von Diagonalgestalt ist. Dabei ist S natürlich nicht eindeutig bestimmt, und auch die Diagonalelemente $\lambda_j \in \mathbb{R}$ nicht. Aber nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz sind die Zahlen

$k =$ Anzahl der $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\lambda_j > 0$,

$t =$ Anzahl der $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\lambda_j < 0$, der *Trägheitsindex* von A , und

$d =$ Anzahl der $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\lambda_j = 0$, der *Defekt* von A ,

eindeutig bestimmt.

- Man kann das zur Klassifikation der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$A(u) = -h \text{ mit } A(u) = \sum_{i,k} a_{ik} u_{x_i x_k}$$

benutzen: Führt man

$$\tilde{x} := S \cdot x$$

als neue Variable ein, so erhält man für die Ableitungen der Funktion

$$\tilde{u}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) := u(x_1, \dots, x_n)$$

nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}_j} \cdot \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n s_{ji} \tilde{u}_{\tilde{x}_j}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} &= \sum_{j,l=1}^n s_{ji} s_{lk} \tilde{u}_{\tilde{x}_j \tilde{x}_l}, \end{aligned}$$

und somit

$$A(u) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \sum_{j,l=1}^n s_{ji} s_{lk} \tilde{u}_{\tilde{x}_j \tilde{x}_l} = \sum_{j,l=1}^n \left(\sum_{i,k=1}^n s_{ji} a_{ik} s_{lk} \right) \tilde{u}_{\tilde{x}_j \tilde{x}_l} = \sum_{j,l=1}^n d_{jl} \tilde{u}_{\tilde{x}_j \tilde{x}_l}$$

mit $D := S \cdot A \cdot S^t$. An Stelle der Differentialgleichung $(*)'$ erhält man die Differentialgleichung

$$(*)'' \quad D(\tilde{u}) = -\tilde{h}(\tilde{u}) \quad \text{mit} \quad D(\tilde{u}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{u}_{\tilde{x}_j \tilde{x}_j},$$

also eine Differentialgleichung, in der keine gemischten zweiten Ableitungen $\tilde{u}_{\tilde{x}_i \tilde{x}_k}$ mit $i \neq k$ auftauchen.

Man teilt die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten daher in die folgenden Klassen ein.

Definition 4.1.5

Eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten heißt vom

elliptischen Typ, falls A positiv oder negativ definit ist. Dann ist der Defekt $d = 0$ und der Trägheitsindex $t = 0$ oder $t = n$.

hyperbolischen Typ, falls für den Defekt $d = 0$ und für den Trägheitsindex $t = 1$ oder $t = n - 1$ gilt.

ultrahyperbolischen Typ, falls der Defekt gleich null ist, $d = 0$, und für den Trägheitsindex $1 < t < n - 1$ gilt.

parabolischen Typ, falls A ausgeartet ist, also $d > 0$ gilt.

Beispiel 4.1.6.

Die Potentialgleichung aus Beispiel 4.1.3 ist vom elliptischen, die Wellengleichung vom hyperbolischen und die Wärmeleitungsgleichung vom parabolischen Typ.

4.2 Die Potentialgleichung

Wir folgen [E].

Definition 4.2.1

1. Die Potentialgleichung oder Laplace-Gleichung ist die elliptische lineare partielle Differentialgleichung

$$\Delta u = 0;$$

die inhomogene lineare partielle Differentialgleichung

$$\Delta u = f$$

heißt inhomogene Potentialgleichung oder Poisson-Gleichung. Hierbei ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f: \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben.

2. Eine C^2 -Funktion, die Lösung der Potentialgleichung ist, heißt harmonische Funktion.

Bemerkung 4.2.2.

1. Sei u eine physikalische Größe, die sich im Gleichgewicht befinde. Damit meinen wir, dass für jede offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand der totale Fluss F von u durch ∂V verschwindet:

$$\int_{\partial V} \langle F, \nu \rangle dS = 0.$$

Nach dem Satz von Gauß 3.2.9 heißt dies

$$\int_V \operatorname{div} F dx = 0;$$

da dies für ein beliebiges solche Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ gelten muss, folgt unter geeigneten Stetigkeitsannahmen wie im Beweis von Lemma 2.1.9, dass $\operatorname{div} F = 0$.

Dabei ist der Fluss F von u oft entgegengesetzt zum Gradienten $\operatorname{grad} u$ von u , also von Regionen hoher zu Regionen niedriger Konzentration hin, $F = -a \operatorname{grad} u$ mit $a > 0$. Es folgt

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u = 0.$$

2. Hat u die Interpretation einer Temperatur und ist F der Wärmeleitungsfluss, so ist die Gleichung $F = -a \operatorname{grad} u$ das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz. Steht u für das elektrostatische Potential, a für die Leitfähigkeit und F für die elektrische Flussdichte, so erhalten wir das Ohmsche Gesetz.

Wir geben Beispiele für harmonische Funktionen und physikalische Situation, in denen diese eine Rolle spielen:

$\frac{1}{r}$	auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$	Punktladung im Ursprung
$\frac{x}{r^3}$	auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$	Dipol in x -Richtung im Ursprung
$-\ln(r^2 - z^2)$	\mathbb{R}^3 ohne z -Achse	konstante Ladungsverteilung auf der z -Achse
$\frac{x}{r^2 - z^2}$	\mathbb{R}^3 ohne z -Achse	Linie von Dipolen in x -Richtung auf der z -Achse

Wir hatten in der MfP2 schon spezielle, rotationssymmetrische harmonische Funktionen kennen gelernt.

Definition 4.2.3

Sei κ_n wieder das Volumen der Einheitsvollkugel im \mathbb{R}^n .

Die harmonische Funktion $\Phi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x| & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\kappa_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Laplace-Gleichung.

Wir notieren schon einmal, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$\underbrace{|\operatorname{grad} \Phi(x)|}_{=:D} \leq \frac{C}{|x|^{n-1}} \quad \text{und} \quad |D^2 \Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^n} \quad (4)$$

Betrachtung 4.2.4.

Für jedes feste $y \in \mathbb{R}^n$ ist auch die Funktion $x \mapsto \Phi(x - y)$ für $x \neq y$ definiert und harmonisch. Für jede Funktion f ist dann auch $x \mapsto \Phi(x - y)f(y)$ harmonisch, und auch endliche Summen solcher Ausdrücke. Aber die Faltung

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y)f(y)dy$$

ist nicht harmonisch, denn wir können nicht einfach rechnen

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x \Phi(x-y) f(y) dy = 0,$$

weil wegen des Verhaltens der zweiten Ableitungen von Φ für $x \rightarrow 0$, vgl. (4), die Funktion $D_x^2 \Phi(x-y)$ nicht integrierbar ist. Vielmehr finden wir das folgende wichtige Resultat.

Theorem 4.2.5.

Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Sei u wie oben durch die Faltung definiert,

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy.$$

Dann ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und u löst die Poisson-Gleichung mit Inhomogenität f ,

$$-\Delta u = f.$$

Beweis.

1. Wegen

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y) dy$$

ist der Differenzenquotient für die i -te partielle Ableitung gleich

$$\frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} dy.$$

Da $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ differenzierbar ist, geht der Bruch für $h \rightarrow 0$ gleichmäßig auf \mathbb{R}^n gegen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)$. Da Φ lokal integrierbar ist, finden wir mit Hilfe des Differentiationsatzes 1.5.3

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y) dy \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y) dy. \end{aligned}$$

Da der zweite Ausdruck stetig in x ist, ist $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

2. Wir isolieren die Singularität der Fundamentallösung $\Phi(y)$ in $y = 0$ in einer kleinen Kugel vom Radius $\epsilon > 0$:

$$\Delta u(x) = \int_{B_\epsilon(0)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy.$$

Für das erste Integral I_ϵ finden wir

$$|I_\epsilon| \leq C \|D^2 f\|_\infty \int_{B_\epsilon(0)} \Phi(y) \leq \begin{cases} C\epsilon^2 |\ln \epsilon| & \text{für } n = 2 \\ C\epsilon^2 & \text{für } n \geq 3 \end{cases},$$

so dass $I_\epsilon \rightarrow 0$ für $\epsilon \rightarrow 0$. Für das Integral im zweiten Summanden von Δu finden wir mit Hilfe von 3.2.13.3:

$$\begin{aligned} J_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} D\Phi(y) \cdot D_x f(x-y) dy + \int_{\partial B_\epsilon(0)} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y) dS(x) \end{aligned}$$

Wir schätzen das zweite Integral mit den Randtermen ab:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial B_\epsilon(0)} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y) dS(x) \right| \leq \|Df\|_\infty \int_{\partial B_\epsilon(0)} |\Phi(y)| dS(y) \\ & \leq \begin{cases} C\epsilon^2 |\ln \epsilon| & \text{für } n = 2 \\ C\epsilon^2 & \text{für } n \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Wir müssen also nur noch den ersten Summanden im zweiten Ausdruck für J_ϵ weiter untersuchen. Eine erneute Anwendung des Satzes 3.2.13.3 liefert

$$K_\epsilon := \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} D\Phi(y) \cdot D_x f(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\epsilon(0)} \Delta\Phi(y) f(x-y) - \int_{\partial B_\epsilon(0)} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y) f(x-y) dS(y)$$

Der erste Term verschwindet, weil die Funktion Φ außerhalb von 0 harmonisch ist. Wir haben auf der Sphäre $\partial B_\epsilon(0)$

$$D\Phi(y) = -\frac{1}{n\kappa_n} \frac{y}{|y|^n} \text{ und } \nu = -\frac{y}{|y|}.$$

Daher ist auf $\partial B_\epsilon(0)$ der Ausdruck

$$\langle D\Phi, \nu \rangle = \frac{1}{n\kappa_n \epsilon^{n-1}}$$

konstant. Nach Beispiel 3.1.16 ist die Oberfläche der Sphäre $\partial B_\epsilon(0)$ gleich $n\kappa_n \epsilon^{n-1}$, so dass wir finden

$$K_\epsilon = -\frac{1}{n\kappa_n \epsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\epsilon(0)} f(x-y) dS(y) = -\frac{1}{\text{vol}(\partial B_\epsilon(x))} \int_{\partial B_\epsilon(x)} f(y) dS(y).$$

Dies geht für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen $-f(x)$.

4. Insgesamt finden wir so im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$, dass $-\Delta u(x) = f(x)$, da f stetig ist.

□

Dies führt uns auf

Definition 4.2.6

1. Sei L ein linearer Differentialoperator auf \mathbb{R}^n . Eine Fundamentallösung oder Elementarlösung von L bezüglich eines Punktes $z \in \mathbb{R}^n$ ist eine Distribution $E_z \in \mathcal{D}'$ mit $LE_z = \delta_z$, wobei δ_z die Diracsche Deltadistribution zu z ist.
2. Ist allgemein eine Distribution u Lösung einer partiellen Differentialgleichung im distributionellen Sinne, so sprechen wir von einer schwachen Lösung, im Gegensatz zu einer klassischen oder starken Lösung $u \in C^k$ für ein geeignetes k .

Bemerkung 4.2.7.

1. Oft sucht man erst nur schwache Lösungen von partiellen Differentialgleichungen, und versucht dann zu zeigen, dass diese auch klassische Lösungen sind. Bei nicht-linearen Differentialgleichungen führt dies zu Problemen, da Distributionen sich nicht multiplizieren lassen. Man braucht dann geeignete Funktionenräume.
2. Ist der Differentialoperator L translationsinvariant, d.h. hat er konstante Koeffizienten, und ist E_0 eine Fundamentallösung von L bezüglich 0, so erhält man durch Verschiebung eine Fundamentallösung von L bezüglich $z \in \mathbb{R}^n$.

Manchmal spricht man statt von der Fundamentallösung von der Greenschen Funktion $(x, z) \mapsto G(x, z) = E_0(x - z)$; wir verwenden den Begriff aber etwas anders und fordern Verträglichkeit mit Randwerten, vergleiche Definition 4.2.21.

Korollar 4.2.8.

Die Funktion $\Phi_z: x \mapsto \Phi_z(x) := \Phi(x - z)$ ist lokal integrierbar und liefert daher eine reguläre Distribution T_{Φ_z} .

Diese ist eine Fundamentallösung für den Differentialoperator $-\Delta$ im Punkt $z \in \mathbb{R}^n$.

Beweis.

Da der Laplaceoperator Δ nach Beispiel 2.1.18.2 formal selbstadjungiert ist, müssen wir für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ zeigen

$$-\Delta_x T_{\Phi_z}[\varphi] \stackrel{\text{def}}{=} T_{\Phi_z}[-\Delta\varphi] = - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_z(y) \Delta\varphi(y) d^n y \stackrel{!}{=} \delta_z[\varphi] = \varphi(z).$$

Wir betrachten für eine gegebene Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}$ die Funktion

$$u(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_z(y) \varphi(y) d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_0(x) \varphi(x + z) d^n x$$

und erhalten aus Theorem 4.2.5 und dem Differentiationsatz 1.5.3, da Φ_0 lokal integrierbar ist,

$$\varphi(z) \stackrel{4.2.5}{=} -\Delta u(z) \stackrel{1.5.3}{=} - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_0(x) \Delta\varphi(x + z) d^n x = - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_z(y) \Delta\varphi(y) d^n y,$$

wobei wir im letzten Schritt noch einmal die Substitution $y = x + z$ vorgenommen haben. \square

Fundamentallösungen erlauben es uns, *eine* Lösung von inhomogenen linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu erhalten:

Satz 4.2.9.

Sei L ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und $E \in \mathcal{D}'$ eine Elementarlösung von L , also $LE = \delta_0$. Dann ist für jede Testfunktion $\rho \in \mathcal{D}$ die Funktion

$$u := E * \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $Lu = \rho$.

Beweis.

Aus Satz 2.1.30 folgt

$$Lu = L(E * \rho) \stackrel{2.1.30}{=} (LE) * \rho = \delta_0 * \rho \stackrel{2.1.29}{=} \rho.$$

\square

Beispiel 4.2.10.

1. Durch Anwendung auf die Fundamentallösung 4.2.8 der Potentialgleichung erhalten wir so wieder Satz 4.2.5 zurück, allerdings mit etwas anderen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen und -aussagen.
2. Im Fall der Helmholtz-Gleichung $(\Delta + k^2)u = 0$ auf \mathbb{R}^3 zeigt man mit Hilfe des Laplace-Operators für rotationssymmetrische Funktionen auf \mathbb{R}^3 aus MfP2

$$\Delta f(r) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) f(r)$$

leicht, dass die lokal-integrierbare Funktion

$$u(x) := \frac{\cos(k\|x\|)}{\|x\|}$$

auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung ist. Man kann zeigen [F, §17], dass die zugehörige reguläre Distribution eine Fundamentallösung ist.

3. Wir werden für die Wärmeleitungsgleichung

$$\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) W(x, t) = 0$$

in Satz 4.3.5 zeigen, dass die lokal-integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$W(x, t) := \begin{cases} \frac{-1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\|x\|^2/4t} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

eine Fundamentallösung ist.

Wir wollen nun Eigenschaften von Lösungen der Potentialgleichung, also von harmonischen Funktionen, untersuchen, ohne die Lösung explizit als Funktion auf einer Teilmenge von \mathbb{R}^n zu kennen. Für eine kompakte Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und über M integrierbare Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ führen wir die Bezeichnung

$$\int_M f := \frac{1}{\text{vol}(M)} \int_M f$$

für das *Mittel* von f über die Untermannigfaltigkeit M ein.

Theorem 4.2.11 (Mittelwertseigenschaft harmonischer Funktionen).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand und $u \in C^2(U)$ harmonisch. Dann gilt für jede Vollkugel $B_r(x) \subseteq U$

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y) = \int_{B_r(x)} u dy.$$

Beweis.

1. Wir betrachten für jedes feste $x \in U$ die reelle Funktion einer Variablen

$$\phi(r) := \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y) = \int_{\partial B_1(0)} u(x + rz) dS(z),$$

die für hinreichend kleine $r > 0$ definiert ist. Dann ist

$$\phi'(r) = \int_{\partial B_1(0)} \langle \text{grad } u(x + rz), z \rangle dS(z)$$

Wir finden nach einer Substitution $y = x + rz$

$$\phi'(r) = \int_{\partial B_r(x)} \langle \text{grad } u(y), \frac{y-x}{r} \rangle dS(y) = \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS(y) \stackrel{3.2.13.4}{=} \frac{r}{n} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy = 0.$$

Also ist ϕ konstant und somit gilt für alle $r \in \mathbb{R}_+$

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\partial B_t(x)} u(y) dS(y) = u(x),$$

weil u nach Voraussetzung stetig ist.

2. Aus Satz 3.1.15 folgt sofort

$$\int_{B_r(x)} u dy \stackrel{3.1.15}{=} \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x)} u dS \right) ds \stackrel{3.1.16}{=} u(x) \int_0^r n \kappa_n s^{n-1} ds = \kappa_n r^n u(x).$$

□

Es gilt auch die Umkehrung:

Satz 4.2.12.

Wenn für eine Funktion $u \in C^2(U)$ für jede Vollkugel $B_r(x) \subseteq U$ die Mittelwertseigenschaft

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u dS$$

gilt, dann ist u harmonisch.

Beweis.

Angenommen, es sei $\Delta u \neq 0$. Nachdem wir gegebenenfalls u durch $-u$ ersetzt haben, finden wir wegen der Stetigkeit von Δu eine Vollkugel $B_r(x) \subseteq U$, so dass $\Delta u > 0$ auf $B_r(x)$ gilt. Dann gilt für die Funktion ϕ wie oben

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} \int_{\partial B_r(x)} \Delta u(y) dy > 0;$$

Widerspruch zur angenommenen Mittelwertseigenschaft. □

Satz 4.2.13 (Maximumsprinzip).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ eine harmonische Funktion.

1. Dann nimmt die Funktion u ihr Maximum auf dem Rand an, $\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u$.
2. Wenn U wegzusammenhängend ist und es einen Punkt $x_0 \in U$ gibt, in dem die Funktion u ihr Maximum annimmt, $u(x_0) = \max_{\bar{U}} u$, so ist u auf U konstant.

Indem man u durch $-u$ ersetzt, sieht man, dass alle Sätze auch gelten, wenn man “Maximum” durch “Minimum” ersetzt.

Beweis.

Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt $x_0 \in U$, in dem das Maximum $M := \max_{\bar{U}} u$ angenommen wird. Die Mittelwertseigenschaft impliziert dann für jede Kugel $B_r(x) \subseteq U$

$$M = u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u dy \leq M.$$

Gleichheit kann nur gelten, wenn $u = M$ auf ganz $B_r(x_0)$ gilt. Damit ist die Menge aller $x \in U$, auf der das Maximum angenommen wird, offen. Da u stetig ist, ist diese Menge auch abgeschlossen, und somit gleich U , was die zweite Behauptung zeigt, aus der sofort die erste Behauptung folgt. □

Das Maximumsprinzip erlaubt es uns, die folgende Eindeutigkeitsaussage zu zeigen:

Satz 4.2.14.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand. Sei $g \in C(\partial U)$ und $f \in C(U)$. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ des *Randwertproblems*

$$-\Delta u = f \text{ auf } U, \quad u = g \text{ auf } \partial U.$$

Beweis.

Seien u und \tilde{u} zwei Lösungen des Randwertproblems. Man wende das Maximumsprinzip auf die beiden Funktionen $\pm(u - \tilde{u})$ an, die beide auf U harmonisch sind und auf dem Rand nur den Wert Null annehmen. \square

Wir können auch zeigen, dass alle harmonischen Funktionen beliebig oft stetig differenzierbar sind.

Satz 4.2.15.

Sei wieder $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand. Eine Funktion $u \in C(U)$, die die Mittelwert-eigenschaft aus Theorem 4.2.11 für jede Vollkugel $B_r(x) \subseteq U$ erfüllt, ist beliebig oft stetig differenzierbar, $u \in C^\infty(U)$.

(Die Funktion muss aber nicht auf dem Rand von U differenzierbar, ja nicht einmal stetig sein.)

Beweis.

Sei $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit Träger $\text{supp}(\eta) = [-1, 1]$. Ferner sei η in einer Umgebung von 0 konstant. Setze für $\epsilon > 0$

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{C_n}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{\|x\|}{\epsilon}\right) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

wobei $C_n > 0$ so gewählt ist, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x) dx = 1$. Betrachte auf $U_\epsilon := \{x \in U \mid d(x, \partial U) > \epsilon\}$ die durch die Faltung definierte Funktion $u^\epsilon = \eta_\epsilon * u$. Nach Satz 2.1.30 ist $u^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$. Wir finden für $x \in U_\epsilon$ mit Hilfe der Mittelwert-eigenschaft 4.2.11

$$\begin{aligned} u^\epsilon(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_U \eta_\epsilon(x-y) u(y) dy \\ &= \frac{C_n}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} \eta\left(\frac{\|x-y\|}{\epsilon}\right) u(y) dy \\ &\stackrel{3.1.15}{=} \frac{C_n}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right) dr \left(\int_{\partial B_r(x)} u dS \right) \\ &\stackrel{4.2.11}{=} \frac{C_n}{\epsilon^n} u(x) \int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right) n \kappa_n r^{n-1} dr = u(x) \end{aligned}$$

Somit ist $u = u^\epsilon$ auf U_ϵ für jedes $\epsilon > 0$ und als Faltung mit einer glatten Funktion beliebig oft stetig differenzierbar. \square

Indem man Lösungen der Potentialgleichung weiter durchdifferenziert, beweist man induktiv die folgenden Abschätzungen, die die Mittelwert-eigenschaft 4.2.11 verallgemeinern:

Satz 4.2.16.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(U)$ harmonisch. Dann gilt

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}$$

für jede Vollkugel $B_r(x_0) \subseteq U$ und jeden Multiindex α der Ordnung k . Die Konstanten sind

$$C_0 = \frac{1}{\kappa_n} \text{ und } C_k = \frac{(2^{n+1} n k)^k}{\kappa_n}.$$

Beweis.

Für $k = 0$ folgt die Aussage sofort aus dem Mittelwertsatz 4.2.11. Wir zeigen die Aussage für $k = 1$ und verweisen für den Induktionsschritt auf [E, §2.2].

Durch Differenzieren der Laplace-Gleichung folgt wegen Satz 4.2.15, dass auch die partielle Ableitung u_i eine harmonische Funktion ist. Somit folgt mit Hilfe der Mittelwertseigenschaft 4.2.11 von u_i

$$\begin{aligned} |u_i(x_0)| &\stackrel{4.2.11.1}{=} \left| \int_{B_{r/2}(x_0)} u_i dx \right| \stackrel{3.2.13.1}{=} \left| \frac{2^n}{\kappa_n r^n} \int_{\partial B_{r/2}(x_0)} u \nu_i dS \right| \\ &\leq \frac{2n}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B_{r/2}(x_0))}. \end{aligned}$$

Wegen der Dreiecksungleichung liegt für $x \in \partial B_{r/2}(x_0)$ die Kugel $B_{r/2}(x_0) \subseteq B_r(x_0) \subseteq U$, so dass wir aus der Ungleichung für $k = 0$ erhalten

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

Aus beiden Ungleichungen zusammen erhalten wir für jeden Multiindex α der Ordnung 1

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{2^{n+1} n}{\kappa_n} \frac{1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

□

Wir ziehen nun zwei wichtige Schlussfolgerungen:

Korollar 4.2.17 (Satz von Liouville).

Sei $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf ganz \mathbb{R}^n definiert, harmonisch und beschränkt. Dann ist u konstant.

Beweis.

Wähle ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für jedes $r > 0$, indem wir die Abschätzungen aus Satz 4.2.16 für $|\alpha| = 1$ auf die Vollkugel $B_r(x_0)$ anwenden

$$|\text{grad}u(x_0)| \leq \frac{2n^2}{r} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Daher ist $\text{grad}u(x_0) = 0$ und somit u konstant. □

Korollar 4.2.18.

Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ mit $n \geq 3$. Dann ist jede beschränkte Lösung der inhomogenen Potentialgleichung

$$-\Delta u = f$$

auf ganz \mathbb{R}^n von der Form

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy + C$$

mit einer Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Beweis.

Für $n \geq 3$ gilt für die Fundamentallösung $\Phi(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$. Daher ist

$$\tilde{u}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy$$

eine beschränkte Lösung von $-\Delta u = f$ auf \mathbb{R}^n . Nach dem Satz von Liouville 4.2.17 ist für jede weitere beschränkte Lösung u die Differenz $u - \tilde{u}$ konstant. \square

Satz 4.2.19 (Harnacksche Ungleichung).

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene wegzusammenhängende Teilmenge, deren Abschluss \bar{V} kompakt ist. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, die \bar{V} enthält. Man sagt, V sei kompakt in U enthalten und schreibt dafür $V \subseteq\subseteq U$. Dann gibt es eine positive Konstante $C > 0$, die nur von der Teilmenge V abhängt, so dass

$$\sup_V u \leq C \inf_V u$$

für jede nicht-negative harmonische Funktion u auf U gilt.

Insbesondere gilt für alle $x, y \in V$, dass

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y).$$

Dies zeigt, dass alle Funktionswerte einer harmonischen Funktion auf V vergleichbar sind: fern vom Rand ∂U hat die Potentialgleichung ausgleichende Wirkung.

Beweis.

Setze $r := \frac{1}{4}d(V, \partial U)$. Betrachte $x, y \in V$ mit $|x - y| \leq r$. Dann ist $B_r(y) \subseteq B_{2r}(x)$ und es gilt

$$\begin{aligned} u(x) &\stackrel{4.2.11}{=} \int_{B_{2r}(x)} u(z)dz \geq \frac{1}{\kappa_n 2^n r^n} \int_{B_r(y)} u(z)dz \quad [\text{da } u \text{ nicht-negativ}] \\ &= \frac{1}{2^n} \int_{B_r(y)} u(z)dz \stackrel{4.2.11}{=} \frac{1}{2^n} u(y). \end{aligned}$$

Wir haben also für solche x, y die Abschätzungen

$$2^n u(y) \geq u(x) \geq \frac{1}{2^n} u(y).$$

Weil \bar{V} kompakt ist, können wir die Menge \bar{V} durch endlich viele Vollkugeln $(B_i)_{i=1, \dots, N}$ vom Radius r überdecken. Da V wegzusammenhängend ist, können wir so nummerieren, dass $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$. Dann gilt

$$u(x) \geq \frac{1}{2^{nN}} u(y).$$

\square

Sei wieder $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, mit glattem Rand. Wir wollen nun noch die Existenz der Lösung des Randwertproblems

$$-\Delta u = f \text{ auf } U, \quad u = g \text{ auf } \partial U,$$

deren Eindeutigkeit wir schon in Satz 4.2.14 gesehen haben, untersuchen.

Betrachtung 4.2.20.

1. Sei $x \in U$ und $\epsilon > 0$ so gewählt, dass $B_\epsilon(x) \subseteq U$. Aus der Greenschen Formel 3.2.13.4 wissen wir, dass auf $V_\epsilon := U \setminus B_\epsilon(x)$ für die Fundamentallösung Φ gilt

$$\int_{V_\epsilon} (u(y)\Delta_y\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\Delta u(y)) \, dy = \int_{\partial V_\epsilon} \left(u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) \right) \, dS(y).$$

Nun ist $\Delta_y\Phi = 0$. Ferner zeigt man, dass auf der rechten Seite der Randterm zur Randkomponente $\partial B_\epsilon(x)$, der Φ enthält, für $\epsilon \rightarrow 0$ verschwindet. Wie im Beweis von Theorem 4.2.5 folgt, dass der Randterm zur Randkomponente $\partial B_\epsilon(x)$, der $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}$ enthält, gegen $u(x)$ konvergiert. Man findet so im limes $\epsilon \rightarrow 0$

$$(*) \quad u(x) = \int_{\partial U} \left(\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) - u(y)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y) \right) \, dS(y) - \int_U \Phi(y-x)\Delta u(y) \, dy.$$

Diese Gleichung gilt für jede Funktion $u \in C^2(U)$. Würden wir im Randwertproblem auch noch unabhängig die Normalenableitung $\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)$ vorschreiben können, so hätten wir das Randwertproblem gelöst. Allerdings ist nicht klar, wie wir die Normalenableitung *konsistent* vorschreiben können.

2. Wir führen daher für jedes $x \in U$ als *Korrekturproblem* das Randwertproblem

$$\Delta\varphi^x = 0 \text{ auf } U, \quad \varphi^x(y) = \Phi(y-x) \text{ für alle } y \in \partial U$$

ein. Eine erneute Anwendung der Greenschen Formel 3.2.13.4 liefert für jedes $x \in U$

$$(**) \quad -\int_U \varphi^x(y)\Delta u(y) \, dy = \int_{\partial U} \left(u(y)\frac{\partial\varphi^x}{\partial\nu}(y) - \varphi^x(y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) \right) \, dS(y) \\ = \int_{\partial U} \left(u(y)\frac{\partial\varphi^x}{\partial\nu}(y) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) \right) \, dS(y).$$

Definition 4.2.21

Die Funktion

$$G(x,y) := \Phi(y-x) - \varphi^x(y), \quad x,y \in U, x \neq y,$$

heißt Greensche Funktion für die offene Teilmenge U mit glattem Rand.

Satz 4.2.22.

Wenn $u \in C^2(\bar{U})$ das *Dirichletsche Randwertproblem*

$$-\Delta u = f \text{ auf } U, \quad u = g \text{ auf } \partial U$$

löst, dann gilt

$$u(x) = -\int_{\partial U} g(y)\frac{\partial G}{\partial\nu_y}(x,y) \, dS(y) + \int_U G(x,y)f(y) \, dy.$$

Beweis.

Indem man (*) und (**) addiert, findet man für die Funktion

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \varphi^x(y), \quad x,y \in U, x \neq y,$$

die Gleichung

$$u(x) = -\int_{\partial U} u(y)\frac{\partial G}{\partial\nu_y}(x,y) \, dS(y) - \int_U G(x,y)\Delta u(y) \, dy.$$

□

Bemerkungen 4.2.23.

1. Man kann zeigen, dass Greensche Funktionen symmetrisch sind, $G(x, y) = G(y, x)$.
2. Ein konkreter Ausdruck für die Greensche Funktion kann im allgemeinen nur angegeben werden, wenn die Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine einfache Gestalt hat. Beispielsweise rechnet man für $U = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $0 \neq x \in U$ nach, dass das Korrekturproblem gelöst wird durch

$$\varphi^x(y) = \Phi(\|x\| \cdot y - \|x\|^{-1} \cdot x).$$

4.3 Die Wärmeleitungsgleichung

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der Wärmeleitungsgleichung

$$\left(\Delta_x - \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) = 0,$$

und mit der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung

$$\left(\Delta_x - \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) = \rho(x, t)$$

mit gegebener Inhomogenität $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Bemerkungen 4.3.1.

1. Als physikalische Motivation betrachte wieder eine Größe u mit Flussdichte F . Es gilt dann für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand

$$\frac{d}{dt} \int_U u dx = - \int_{\partial U} F dS.$$

(Das Minuszeichen kommt daher, dass wir mit der äußeren Normale arbeiten.) Somit gilt unter geeigneten Annahmen an u und F nach dem Differentiationssatz 1.5.3 und dem Satz von Gauß 3.2.9

$$u_t = - \operatorname{div} F.$$

Wenn der Fluss F proportional zum Gradienten von u ist, $F = -a \operatorname{grad} u$, also von einem Konzentrationsunterschied getrieben wird, ist $u_t = a \operatorname{div} \operatorname{grad} u = a \Delta u$ mit $a > 0$. Die Wärmeleitungsgleichung beschreibt also Ausgleichsvorgänge: wo die räumliche Änderung zweiter Ordnung stark ist, ist die zeitliche Änderung groß.

2. Schon im Fall einer Dimension, $n = 1$, ist das Verhalten der Wärmeleitungsgleichung typisch. Wir betrachten daher das Anfangswertproblem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{mit} \quad u(x, 0) = f(x),$$

wobei $f \in \mathcal{S}$ eine schnell fallende Funktion ist. Dies beschreibt z.B. die Temperaturentwicklung eines Stabes unendlicher Länge.

Satz 4.3.2.

Die Funktion

$$u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$u(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy.$$

ist die eindeutige Lösung der partiellen Differentialgleichung $u_{xx} = u_t$, die den folgenden Bedingungen genügt:

1. Es gilt $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = f(x)$, wobei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gegeben ist.
2. Für jedes $t > 0$ ist die Funktion $u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine Schwartzfunktion.
3. Die Funktion u ist nach x und t beliebig oft differenzierbar.

Bemerkungen 4.3.3.

1. Aus der expliziten Formel für $u(x, t)$ folgt: sind die Anfangswerte auf einem beliebig kleinen Intervall positiv, so gilt auch für alle $t > 0$ stets $u(x, t) > 0$. Da dies für *alle* $x \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt, liegt hier eine *unendliche* Ausbreitungsgeschwindigkeit für Störungen vor.
2. Man beachte, dass x und t im Exponenten mit unterschiedlichen Potenzen eingehen. Hier tritt eine dimensionsbehaftete Konstante auf.

Beweis.

1. Wir machen einen Produktansatz und suchen nach Lösungen der Wärmeleitungsgleichung der Form

$$u(x, t) = a(t)b(x).$$

Ein solches u ist eine nicht-triviale Lösung, wenn $a(t), b(x) \neq 0$ gilt und

$$a(t) \frac{d^2 b(x)}{dx^2} = b(x) \frac{da(t)}{dt}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} = \frac{1}{b(x)} \frac{d^2 b(x)}{dx^2} = c = \text{const.},$$

denn die linke Seite hängt nicht von x und die rechte Seite nicht von t ab.

Lösungen, die für $|x| \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben, erhält man für $c = -k^2 < 0, k \in \mathbb{R}$, und zwar

$$a(t) = A_1 e^{-k^2 t}, b(x) = A_2 e^{ikx}$$

mit reellen Konstanten A_1, A_2 , insgesamt also

$$u(x, t) = A e^{-k^2 t + ikx}.$$

mit einer Konstanten $0 \neq A \in \mathbb{R}$.

2. Wegen der Linearität der Wärmeleitungsgleichung ist auch jede Summe der unter 1. gefundenen Lösungen zu verschiedenen Konstanten k wieder eine Lösung. Sogar das Integral über unendlich viele solcher Lösungen ist wieder eine Lösung,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{-k^2 t + ikx} dk,$$

wenn A eine schnell fallende Funktion ist. Denn dann existiert zum einen das Integral, vgl. 2.2.16.3, und zum anderen darf man nach dem Differentiationssatz 1.5.3 die Differentiation mit der Integration vertauschen.

3. Damit die Funktion u das Anfangswertproblem löst, muss die Funktion A so bestimmt werden, dass

$$f(x) = u(x, 0) = \lim_{t \searrow 0} u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dk$$

gilt.

Dann muss aber die Funktion \check{f} mit $\check{f}(x) = f(-x)$ die Fouriertransformierte der Funktion $A(k)$ sein. Da wir f als Schwartzfunktion vorausgesetzt haben, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, können wir die Fourier-Inversionsformel 2.2.8 anwenden und erhalten

$$A(k) = \widehat{f}(k).$$

Insbesondere ist auch A eine Schwartzfunktion, $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Somit erhalten wir

$$(*) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{-k^2 t + ikx} dk.$$

Hieraus folgt, dass die Funktion $u(-x, t)$ für festes $t > 0$ die Fourier-Transformierte der Funktion h_t mit

$$h_t(k) := \widehat{f}(k) e^{-k^2 t}$$

ist. Man sieht, dass mit wachsendem t die Funktion für größere Wellenvektoren k schneller abklingt. Dies reflektiert die glättende Wirkung des Wärmeleitungsflusses. Wegen $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist für jedes $t > 0$ die Funktion $h_t(k)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ und somit auch $u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ als ihre Fouriertransformierte. Außerdem ist die Funktion u nach den Variablen x und t beliebig oft differenzierbar.

4. Sei jetzt $t > 0$. Unter Verwendung der Rechenregeln für Faltung und Fourier-Transformation 2.2.5 kann man (*) so umformen, dass anstelle von \widehat{f} die Funktion f selbst auftritt:

$$(**) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}} dy.$$

5. Wir wollen zeigen, dass eine Lösung u der Wärmeleitungsgleichung, die die Bedingungen 1.-3. erfüllt, eindeutig ist. Dazu betrachte die Funktion

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \\ t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)^2 dx.$$

Sie ist monoton fallend, denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)^2 dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) dx \stackrel{*}{=} -2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right)^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Hierbei wurde bei * partiell integriert.

Also gilt für $0 < t_1 \leq t_2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t_1)^2 dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t_2)^2 dx.$$

Ist also $u(x, t_1) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, etwa zum Zeitpunkt $t_1 = 0$, so folgt auch $u(x, t) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle späteren Zeiten $t \geq t_1$. Also ist

$$u(x, t) = 0 \text{ für alle } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

die einzige Lösung der Wärmeleitungsgleichung, die die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = 0$$

erfüllt. Wegen der Linearität der Wärmeleitungsgleichung ist dann die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig bestimmt.

□

Bemerkungen 4.3.4.

1. Stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten:

Seien f_1 und $f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ zwei Anfangs-Temperaturverteilungen und u_1, u_2 die zugehörigen Lösungen. Dann folgt aus der Formel (***) aus dem Satz:

$$\begin{aligned} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |f_1(y) - f_2(y)| dy \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}} |f_1(y) - f_2(y)| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-k)^2}{4t}} dk \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}} |f_1(y) - f_2(y)| \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds}_{=1} \end{aligned}$$

Mit der Supremumsnorm $\|f\|_{\infty} := \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(y)|$ folgt also aus $\|f_1 - f_2\|_{\infty} < \varepsilon$

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon \text{ für alle } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

2. Die Formel (***) kann man für die Berechnung von $u(x, t)$ für $t < 0$ nicht verwenden. Ist $t < 0$, so ist

$$h_t(k) := \widehat{f}(k) e^{-k^2 t}$$

im Allgemeinen keine Schwartzfunktion und die Fouriertransformierte existiert nicht.

3. Man muss wirklich fordern, dass das Wachstum der Funktion $u(-, t)$ für jedes t beschränkt ist; sonst hat schon das Anfangswertproblem mit $g(x) = 0$ unendlich viele Lösungen, die aber für $|x| \rightarrow \infty$ schnell wachsen.

Die Verallgemeinerung dieser Resultate auf beliebige Dimension ist nun nicht schwierig. Wir formulieren sie durch Fundamentallösungen:

Satz 4.3.5.

Die Funktion $W: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$W(x, t) := \begin{cases} -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Dann ist W lokal-integrierbar und die zugehörigen reguläre Distribution eine Fundamentallösung des Differentialoperators $L := \Delta - \frac{\partial}{\partial t}$ zum Punkt 0.

Beweis.

1. Es gilt nach Beispiel 1.5.16

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|^2} d^n y = \pi^{n/2};$$

mit der Substitution $x = \sqrt{4t}y$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} d^n x = 1 \quad \text{für alle } t > 0.$$

Für jedes feste $T > 0$ ergibt sich damit bei Integration von $|W(x, t)|$ über $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ der Wert T , und somit ist die Funktion W auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ lokal-integrierbar und definiert somit eine reguläre Distribution.

Es hängt W nur von t und $r := \|x\|$ ab. Auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus (0, 0)$ ist W beliebig oft differenzierbar und erfüllt die homogene Wärmeleitungsgleichung: dies folgt aus

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t} \right) t^{-n/2} e^{-r^2/(4t)} = 0.$$

2. Wir wenden nun Satz 2.1.14 auf die Funktion $f(x) := \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-\|x\|^2}$ an und erhalten eine Dirac-Folge

$$f_k := k^n \cdot f(k \cdot -) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Somit gilt mit $k = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\varepsilon\pi)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\varepsilon}} \psi(x) d^n x = \psi(0)$$

für jede Testfunktion $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ und $\psi_\varepsilon(x) := \varphi(x, \varepsilon)$ folgt also

$$(*) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} -W(x, \varepsilon) \psi_0(x) d^n x = \psi_0(0).$$

3. Der adjungierte Operator im Sinne von Bemerkung 2.1.15 des Laplace-Operators Δ ist nach Beispiel 2.1.18 der Laplace-Operator Δ selbst. Der adjungierte Differentialoperator zum Wärmeleitungsoperator $L = \Delta - \frac{\partial}{\partial t}$ ist $L^* = \Delta + \frac{\partial}{\partial t}$. Deshalb ist

$$LW[\varphi] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} W(x, t) L^* \varphi(x, t) d^n x dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(\Delta W(x, t))\varphi(x, t) + W(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t)}_{\frac{\partial}{\partial t}(W(x, t)\varphi(x, t))} d^n x dt,$$

da die Funktion W auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus (0, 0)$ nach Teil 1. dieses Beweises die Wärmeleitungsgleichung erfüllt. Jetzt ist

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t}(W(x, t)\varphi(x, t)) dt d^n x = - \int_{\mathbb{R}^n} W(x, \varepsilon) \psi_\varepsilon(x) d^n x \\ & = - \int_{\mathbb{R}^n} W(x, \varepsilon) \psi_0(x) d^n x + \int_{\mathbb{R}^n} W(x, \varepsilon) (\psi_0(x) - \psi_\varepsilon(x)) d^n x \end{aligned}$$

Wegen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ konvergiert $\psi_\varepsilon(x)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen $\psi_0(x)$, und damit das zweite Integral gegen 0. wir haben somit

$$LW[\varphi] \stackrel{(*)}{=} \psi_0(0) = \varphi(0, 0) = \delta_0[\varphi].$$

□

Es folgt nun aus Satz 4.2.9:

Korollar 4.3.6.

Die inhomogene Wärmeleitungsgleichung $(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}) u(x, t) = \rho(x, t)$, mit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, besitzt die spezielle Lösung

$$u(x, t) = - \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{(t - \tau)^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4(t-\tau)}} \rho(y, \tau) d^n y \right) d\tau.$$

4.4 Die Wellengleichung

Wir betrachten als letzte lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten die Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

Wir werden sehen, dass hier Lösungen nicht automatisch C^∞ -Funktionen sein müssen, im Gegensatz zur Potentialgleichung, vgl. Satz 4.2.15. Ein neues Phänomen ist die *endliche* Ausbreitungsgeschwindigkeit, im Gegensatz zur unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit bei der Wärmeleitungsgleichung, vgl. Bemerkung 4.3.3.1. Die Funktion u beschreibe ein elastisches Medium; F sei ein Vektorfeld, das die herrschende Kraftdichte beschreibt. Dann gilt für ein Volumen $V \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_V u dx = - \int_{\partial V} \langle F, \nu \rangle dS(x).$$

(Das Minuszeichen kommt wieder daher, dass wir mit der äußeren Normale arbeiten.) Aus dem Satz von Gauß 3.2.9 folgt $u_{tt} = -\operatorname{div} F$. Für elastische Körper ist nach dem Hookschen Gesetz die Kraftdichte F proportional zum Gradienten der Auslenkung u , also $F = -a \operatorname{grad} u$ mit $a > 0$. Es folgt $u_{tt} = a \operatorname{div} \operatorname{grad} u = a \Delta u$.

Betrachtung 4.4.1 (Die Wellengleichung im \mathbb{R}^1).

- Die Wellengleichung im \mathbb{R}^1 hat die Form

$$u_{xx} - c^{-2}u_{\tilde{t}\tilde{t}} = 0 \text{ mit } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Wir vereinfachen die Gleichung, indem wir statt \tilde{t} die neue Variable t mit $c^{-1}t = \tilde{t}$ einführen. Dann gilt $u_t = u_{\tilde{t}} \frac{d\tilde{t}}{dt} = c^{-1}u_{\tilde{t}}$ und $u_{tt} = c^{-2}u_{\tilde{t}\tilde{t}}$. Somit erhält man die Gleichung

$$u_{xx} - u_{tt} = 0.$$

- Wir führen eine weitere Transformation durch und setzen

$$\bar{x} := x + t \text{ und } \bar{t} := x - t, \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{\bar{x} + \bar{t}}{2} \text{ und } t = \frac{\bar{x} - \bar{t}}{2}.$$

Um eine Differentialgleichung für die Funktion

$$v(\bar{x}, \bar{t}) := u\left(\frac{\bar{x} + \bar{t}}{2}, \frac{\bar{x} - \bar{t}}{2}\right)$$

zu finden, benutzen wir die Kettenregel:

$$\begin{aligned} u_x &= v_{\bar{x}}\bar{x}_x + v_{\bar{t}}\bar{t}_x = v_{\bar{x}} + v_{\bar{t}} \\ u_t &= v_{\bar{x}}\bar{x}_t + v_{\bar{t}}\bar{t}_t = v_{\bar{x}} - v_{\bar{t}} \\ u_{xx} &= v_{\bar{x}\bar{x}}\bar{x}_x + v_{\bar{x}\bar{t}}\bar{t}_x + v_{\bar{t}\bar{x}}\bar{x}_x + v_{\bar{t}\bar{t}}\bar{t}_x = v_{\bar{x},\bar{x}} + 2v_{\bar{x}\bar{t}} + v_{\bar{t}\bar{t}} \\ u_{tt} &= v_{\bar{x}\bar{x}}\bar{x}_t + v_{\bar{x}\bar{t}}\bar{t}_t - v_{\bar{t}\bar{x}}\bar{x}_t - v_{\bar{t}\bar{t}}\bar{t}_t = v_{\bar{x},\bar{x}} - 2v_{\bar{x}\bar{t}} + v_{\bar{t}\bar{t}} \end{aligned}$$

und daher

$$0 = u_{xx} - u_{tt} = 4v_{\bar{x}\bar{t}}.$$

oder $v_{\bar{x}\bar{t}} = 0$.

- Daraus folgt sofort, dass die Ableitung $v_{\bar{x}}$ nicht von \bar{t} abhängt. Wir haben also $v_{\bar{x}} = c_1(\bar{x})$. Damit folgt für die Funktion v :

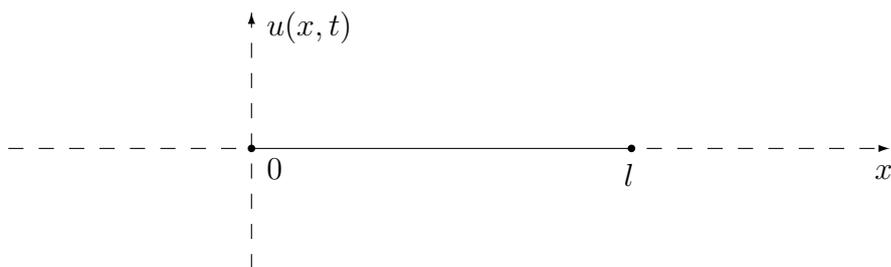
$$v = w_1(\bar{x}) + w_2(\bar{t})$$

und für die Funktion u somit

$$u(x, t) = w_1(\bar{x}) + w_2(\bar{t}) = w_1(x + t) + w_2(x - t).$$

Die Funktionen $w_i \in C^2(\mathbb{R})$ werden durch die Differentialgleichung nicht weiter eingeschränkt und können beliebig gewählt werden: es existiert eine *allgemeine Lösung*. Insbesondere müssen die Funktionen nur in $C^2(\mathbb{R})$ und nicht in $C^\infty(\mathbb{R})$ liegen.

- Interpretiert man t als Zeit und x als Ort, so ist c eine Geschwindigkeit. Die Koordinaten $x_{\pm} := x \pm t$ heißen dann auch *Lichtkegelkoordinaten* von \mathbb{R}^2 . Der Teil der Lösung, der durch w_2 beschrieben wird, schreitet nach rechts fort; der Teil, der durch w_1 beschrieben wird, nach links.
- Die Wellengleichung beschreibt z.B. die Bewegung einer schwingenden Saite, die in Ruhelage das Intervall $[0, l]$ auf der x -Achse ausfüllt:



Die Saite wird ausgelenkt und zur Zeit $t = 0$ losgelassen, wobei ihr noch eine Geschwindigkeit gegeben werden kann. Bezeichnet $u(x, t)$ die Verschiebung des Saitenpunktes an der Stelle $x \in [0, l]$ zur Zeit t , so ist die Beschleunigung u_{tt} proportional zur Krümmung u_{xx} der Saite. Daher genügt u der Wellengleichung

$$(1) \quad u_{xx} - u_{tt} = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(2) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{für } x \in [0, l]$$

mit frei wählbaren Funktionen u_0, u_1 , die den Randbedingungen

$$(3) \quad u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \text{für } t \in [0, \infty)$$

genügen sollen. Man spricht von einem *Anfangs-Randwertproblem*.

- Die Forderung (3.) der stetigen Abhängigkeit von den Parametern lässt sich dann hier folgendermaßen ausformulieren: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jede weitere Lösung v der Wellengleichung (1), die auch die Randbedingungen

$$(4) \quad v(0, t) = v(l, t) = 0$$

erfüllt, und für deren Anfangswerte v_j für alle $x \in [0, l]$ gilt

$$|v_j(x) - u_j(x)| < \delta, \quad j = 0, 1$$

folgt:

$$|v(x, t) - u(x, t)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in [0, l] \quad \text{und für alle } t \geq 0.$$

Wir wollen zuerst die unendlich lange Saite betrachten:

Satz 4.4.2.

Es seien Anfangswerte $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ für die Auslenkung und $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ für die Geschwindigkeit vorgegeben. Dann ist die durch die *d'Alembert'sche Formel* gegebene Funktion

$$u(x, t) := \frac{1}{2} \left(u_0(x+t) + u_0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} u_1(\tau) d\tau \right)$$

zweimal stetig differenzierbar, $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, und erfüllt für alle $x, t \in \mathbb{R}$

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x).$$

Sie erfüllt alle drei Forderungen (1.) - (3.) aus Betrachtung 4.1.2.

Beweis.

- Der allgemeine Lösungsansatz aus Betrachtung 4.4.1

$$(*) \quad u(x, t) := w_1(x+t) + w_2(x-t)$$

ergibt für $t = 0$ zusammen mit den Anfangsbedingungen die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= w_1(x) + w_2(x) \stackrel{!}{=} u_0(x); \\ u_t(x, 0) &= w_1'(x) - w_2'(x) \stackrel{!}{=} u_1(x). \end{aligned}$$

Integrieren wir die letzte Gleichung bezüglich x , so erhalten wir

$$w_1(x) - w_2(x) = \int_c^x u_1(\tau) d\tau,$$

mit einer beliebigen Konstante $c \in \mathbb{R}$. Addition und Subtraktion dieser Gleichung und der ersten Gleichung liefert

$$\begin{aligned} 2w_1(x) &= u_0(x) + \int_c^x u_1(\tau) d\tau, \\ 2w_2(x) &= u_0(x) - \int_c^x u_1(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$(**)u(x, t) = w_1(x+t) + w_2(x-t) = \frac{1}{2} \left(u_0(x+t) + u_0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} u_1(\tau) d\tau \right)$$

Damit ist die d'Alembertsche Formel bewiesen und die Existenz einer Lösung gezeigt. Also ist Forderung 2. aus Betrachtung 4.1.2 für die Wellengleichung erfüllt.

- Die Differenz zweier Lösungen, die die gleichen Anfangsbedingungen erfüllen, ist eine Lösung der Differentialgleichung, die die Anfangsbedingungen

$$u_0(x) = u_1(x) = 0$$

erfüllt und daher nach (**) gleich Null ist. Dies zeigt die Eindeutigkeit.

- Wir untersuchen die Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen: wird die Anfangsbedingung u_j im Intervall $[a, b]$ der Länge $L := b - a$ zu \bar{u}_j abgeändert, wobei für die Differenzfunktionen

$$v_j(x) := \bar{u}_j(x) - u_j(x)$$

die Supremums-Normen beschränkt seien:

$$|v_j(x)| < \frac{\varepsilon}{1+L} \quad \text{für } j = 0, 1,$$

so folgt aus der expliziten Form der Lösung (**):

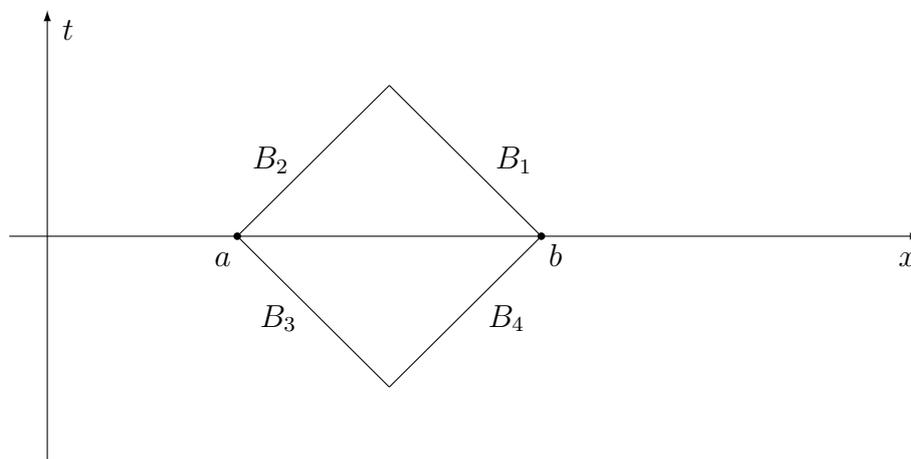
$$\begin{aligned} |\bar{u}(x, t) - u(x, t)| &= \left| \frac{1}{2} \left(v_0(x+t) + v_0(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} v_1(\tau) d\tau \right) \right| \\ &< \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{1+L} + \frac{\varepsilon}{1+L} + 2L \frac{\varepsilon}{1+L} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{1+L} (2 + 2L) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Bemerkung 4.4.3.

- Die d'Alembertsche Formel für die Lösung der Wellengleichung zeigt, dass u in einem speziellen Punkt $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ nicht vom Gesamtverlauf der Anfangswerte $u_j(x)$ abhängt, sondern nur von den Werten $u_j(x)$ mit $x \in [x_0 - t_0, x_0 + t_0]$. Dieses Intervall wird dann das *Abhängigkeitsgebiet* $\bar{A}(x_0, t_0)$ des Punktes (x_0, t_0) genannt.

Ändert man die Anfangsbedingungen $u_j(x)$ außerhalb des Abhängigkeitsgebiets $\bar{A}(x_0, t_0)$ ab, so bleibt die Lösung u der Wellengleichung im Punkt (x_0, t_0) unbeeinflusst. Die Wellengleichung hat also eine *endliche* Ausbreitungsgeschwindigkeit.

- Wird andererseits auf der x -Achse ein Intervall $I = [a, b]$ fixiert, dann heißt die Menge $\bar{B}(I)$ der Punkte (x, t) , in denen die Lösung $u(x, t)$ *allein* auf Grund der Kenntnis der Anfangswerte $u_j(x)$ in I ermittelt werden kann, das *Bestimmtheitsgebiet* des Intervalls I .



Aus (***) liest man ab, dass $\bar{B}(I)$ ein abgeschlossenes Quadrat ist.

Bemerkung 4.4.4.

- Wir untersuchen auch den Fall, dass die Saite eine endliche Länge l hat. Dann kommen nach Betrachtung 4.4.1 zu den Anfangsbedingungen auch noch Randbedingungen: es liegt ein Anfangs-Randwertproblem vor. Gesucht sind Lösungen u der Differentialgleichung

$$u_{xx} - u_{tt} = 0$$

mit Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{für } x \in [0, l]$$

und Randbedingungen

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \text{für } t \geq 0.$$

- Wir setzen u als Produkt einer allein von x und einer allein von t abhängigen Funktion an (*Separationsansatz* von Bernoulli):

$$u(x, t) = \alpha(x) \cdot \beta(t).$$

Dann ergibt sich aus der Wellengleichung mit

$$u_{xx} = \alpha''(x) \cdot \beta(t) \quad \text{und} \quad u_{tt} = \alpha(x) \cdot \beta''(t)$$

die Gleichung

$$\frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} = \frac{\beta''(t)}{\beta(t)}.$$

Da diese Gleichung für alle x und t gelten soll, muss es ein $c \in \mathbb{R}$ geben mit

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = \frac{\beta''}{\beta} = c, \text{ also } \alpha'' = c\alpha \text{ und } \beta'' = c\beta,$$

wobei $c = -\lambda^2 < 0$, damit die Lösungen beschränkt bleiben. Dann erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= A \cos(\lambda x + a) \\ \beta(t) &= B \cos(\lambda t + b). \end{aligned}$$

für gewisse Konstanten $a, b, A, B \in \mathbb{R}$. Zur Vereinfachung nehmen wir für die Länge der Saite $l = \pi$ an und finden aus der Randbedingung

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \text{ für alle } t \geq 0$$

die Gleichungen

$$\alpha(0) = \alpha(\pi) = 0,$$

d.h. $a = \pm \frac{\pi}{2}$ und $\lambda = n \in \mathbb{N}$. Somit erhalten wir für jede natürliche Zahl n Lösungen der Form

$$\alpha_n(x) = A_n \sin(nx), \quad \beta_n(t) = B_n \sin(nt) + B'_n \cos(nt).$$

Ein solches Produkt $u = \alpha_n \cdot \beta_n$ heißt *reine Schwingung*.

- Da mit zwei Lösungen u dieser Art auch ihre Summe wieder eine Lösung ist, die die Randbedingung erfüllt, kann eine Anfangsbedingung auf folgende Weise berücksichtigt werden: Es seien Anfangsbedingungen durch Funktionen

$$u_0 \in C^2([0, \pi]) \text{ und } u_1 \in C^1([0, \pi])$$

mit $u_j(0) = u_j(\pi) = 0$ vorgegeben. Sie lassen sich in gleichmäßig konvergente Fourierreihen entwickeln,

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \text{ mit } a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(t) \sin(nt) dt$$

bzw.

$$u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n) \sin(nx) \text{ mit } b_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} u_1(t) \sin(nt) dt.$$

Dies in die d'Alembertsche Formel aus Satz 4.4.2 eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{2} \left(u_0(x-t) + u_0(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} u_1(\tau) d\tau \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \underbrace{(\sin(n(x-t)) + \sin(n(x+t)))}_{2 \sin(nx) \cos(nt)} + \int_{x-t}^{x+t} n b_n \sin(n\tau) d\tau \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin(nx) \cos(nt) - \frac{1}{2} b_n \cos(n\tau) \Big|_{\tau=x-t}^{\tau=x+t} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \left(b_n \sin(nt) + a_n \cos(nt) \right),
 \end{aligned}$$

also eine Reihe in der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \beta_n(t)$, mit Koeffizienten a_n und b_n , die man als Fourierkoeffizienten aus der Anfangsbedingung berechnen kann.

Wir wollen die Wellengleichung auch in höheren Dimensionen untersuchen.

Satz 4.4.5.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge mit glattem Rand ∂U . Für $T > 0$ setze

$$U_T := U \times (0, T] \quad \text{und} \quad \Gamma_T := \bar{U}_T \setminus U_T.$$

Wir wollen das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{array}{lll}
 u_{tt} - \Delta u = f & \text{auf} & U_T \\
 u = g & \text{auf} & \Gamma_T \quad [\text{Anfangs- und Randbedingungen}] \\
 u_t = h & \text{auf} & U \times \{0\} \quad [\text{Anfangsbedingung an zeitliche Ableitung}]
 \end{array}$$

zu vorgegebenen Funktionen lösen. Es gilt:

Es gibt höchstens eine Lösung $u \in C^2(\bar{U}_T)$, die das Anfangs-Randwertproblem löst.

Beweis.

Die Differenz $w := u - \tilde{u}$ zweier Lösungen u, \tilde{u} löst das Anfangsrandwertproblem mit $g = 0$ und $h = 0$. Betrachte die Energie

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_U (w_t^2(x, t) + \|\text{grad}_x w(x, t)\|^2) dx \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} e(t) &= \int_U (w_t w_{tt} + \langle \text{grad}_x w, \text{grad}_x w_t \rangle) dx \\
 &= \int_U w_t (w_{tt} - \Delta w) dx = 0.
 \end{aligned}$$

Bei der partiellen Integration treten keine Randterme auf, da die Randbedingung $w = 0$ auf $\partial U \times [0, T]$ impliziert, dass auch die zeitliche Ableitung w_t auf dem Rand $\partial U \times [0, T]$ verschwindet. Somit ist die Energie erhalten.

Daher gilt für alle $0 \leq t \leq T$, dass $e(t) = e(0) = 0$, so dass die partiellen Ableitungen auf U_T verschwinden, $w_t = 0$ und $\text{grad}_x w = 0$. Die Anfangsbedingung $w = 0$ auf $U \times \{0\}$ impliziert, dass $0 = w = u - \tilde{u}$ auf ganz U_T gilt. \square

Betrachtung 4.4.6.

Wir wollen auch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit wie in Bemerkung 4.4.3 in mehr als einer Raumdimension sehen. Sei $u \in C^2$ eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - \Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.

Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $t_0 > 0$ betrachte den Kegel

$$C = \{(x, t) \mid 0 \leq t \leq t_0, \|x - x_0\| \leq t_0 - t\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

Dies ist ein Kegel mit Spitze (x_0, t_0) , dessen Basis die Vollkugel $B_{t_0}(x_0)$ um x_0 in $\mathbb{R}^n \times \{(0)\}$ vom Radius t_0 ist.

Satz 4.4.7 (Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit).

Sei $u \in C^2$ eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - \Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Gilt $u = 0$ und $u_t = 0$ auf $B_{t_0}(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n \times \{(0)\}$, dann ist $u = 0$ auf dem ganzen Kegel C .

Beweis.

Auch dieser Beweis benutzt die Energie

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{B_{t_0-t}(x_0)} (u_t^2(x, t) + \|\text{gradu}(x, t)\|^2) dx$$

der Lösung u . Wir rechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e(t) &= \int_{B_{t_0-t}(x_0)} (u_t u_{tt} + \langle \text{gradu}, \text{gradu}_t \rangle) dx - \frac{1}{2} \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} (u_t^2(x, t) + \|\text{gradu}(x, t)\|^2) dS \\ &= \int_{B_{t_0-t}(x_0)} u_t (u_{tt} - \Delta u) dx + \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t dS - \frac{1}{2} \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} u_t^2(x, t) + \|\text{gradu}\|^2 dS \\ &= \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} dS \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} u_t - \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} \|\text{gradu}\|^2 \right) \end{aligned}$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung impliziert

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t \right| \leq |u_t| \cdot \|\text{gradu}\| \leq \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} \|\text{gradu}\|^2,$$

so dass der Integrand nicht-positiv ist. Daher ist $\frac{d}{dt} e(t) \leq 0$. Somit ist $e(t) \leq e(0) = 0$ für alle $0 \leq t \leq t_0$. Daher verschwinden wieder die partiellen Ableitungen, $u_t = 0$ und $\text{gradu} = 0$ und es gilt $u = 0$ auf dem gesamten Kegel C . \square

Bemerkung 4.4.8.

Es stellt sich heraus, dass es für explizite Lösungen der Wellengleichung im \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, und ihr *quantitatives Verhalten* einen großen Unterschied macht, ob n ungerade oder gerade ist. Wir betrachten hier nur $n = 3$ und $n = 2$. Man beachte im Folgenden die Differenzierbarkeitsforderungen an die Randwerte.

1. Für die drei-dimensionale Wellengleichung wollen wir für die Differentialgleichung

$$\Delta_3 u - u_{tt} = 0$$

das Anfangswertproblem behandeln: Es werden also für vorgegebene Funktionen $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ Lösungen u gesucht mit

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{und} \quad u_t(x, 0) = u_1(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

2. Wir erinnern an Satz 3.1.15: Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, $n \geq 2$. Dann ist für fast alle $r \in \mathbb{R}_+$ die Funktion f über die Sphäre S_r^{n-1} integrierbar, und es gilt

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d^n x = \int_0^\infty \left(\int_{S_r^{n-1}} f(x) dS(x) \right) dr \text{ und}$$

$$(2) \quad \int_{S_r^{n-1}} f(x) dS(x) = r^{n-1} \cdot \int_{S_1^{n-1}} f(r\xi) dS(\xi).$$

Wir zeigen zunächst in Verallgemeinerung von Satz 4.4.2 das *Huyghenssche Prinzip*:

Sphärische Mittelung liefert für jede C^2 -Funktion $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ eine Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung.

Lemma 4.4.9.

Für eine beliebige Funktion $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ betrachte die Funktion, deren Wert in $x \in \mathbb{R}^3$ für $t \in \mathbb{R}$ durch die Mittelung über eine räumliche Sphäre vom Radius $|t|$ definiert ist:

$$M(t)[\varphi](x) := \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \varphi(x + t\xi) dS(\xi) \stackrel{(2)}{=} \int_{\partial B_{|t|}(x)} \varphi(\xi) dS(\xi)$$

auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, wobei das erste Integral über die 2-Sphäre $S^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \|\xi\| = 1\}$ geht. Dann ist die durch

$$v: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v(x, t) := tM(t)[\varphi](x)$$

definierte Funktion eine Lösung der Wellengleichung

$$\Delta_3 v - v_{tt} = 0.$$

Beweis.

Wir rechnen ganz explizit die Wellengleichung nach.

- Da $\Delta v - v_{tt}$ in t stetig ist, braucht die Behauptung nur für $t \neq 0$ bewiesen zu werden. Dabei kann überdies $t > 0$ angenommen werden, denn der Fall $t < 0$ kann durch die Substitution $\tau := -t$ auf diesen Fall zurückgeführt werden.

Differenzieren wir v nach t , so erhalten wir nach der Produktregel

$$v_t(x, t) = M(t)[\varphi](x) + t \frac{\partial}{\partial t} M(t)[\varphi](x)$$

und durch nochmaliges Differenzieren

$$(*) \quad v_{tt}(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial t} M(t)[\varphi](x) + t \frac{\partial^2}{\partial t^2} M(t)[\varphi](x).$$

- Wir berechnen beide Summanden in (*). Da φ als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt wurde, kann die Differentiation mit der Integration in der Definition von M vertauscht werden. Wir erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial t} M(t)[\varphi](x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1^2(0)} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x + t\xi) dS(\xi)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1^2(0)} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x + t\xi) \xi_i \right) dS(\xi).$$

Nach der Formel (2) in Bemerkung 4.4.8 mit $y = t\xi$ finden wir

$$= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S_t^2} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x + y) y_i \right) dS(y)$$

Mit dem Satz von Gauß 3.2.9 wird hieraus ein Integral über die Vollkugel

$$= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\|y\| \leq t} \underbrace{\operatorname{divgrad}_x \varphi(x + y)}_{\Delta} d^3y.$$

Nach der Formel (1) im Transformationssatz 3.1.15, angewendet auf die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(y) := \begin{cases} \Delta \varphi(x + y) & \text{für } \|y\| \leq t, \\ 0 & \text{für } \|y\| > t \end{cases}$$

erhalten wir für den ersten Summanden in (*)

$$\frac{\partial}{\partial t} M(t)[\varphi](x) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_0^t \left(\int_{\|y\|=\tau} \Delta \varphi(x + y) dS(y) \right) d\tau.$$

Daraus folgt durch nochmaliges Differenzieren nach t

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M(t)[\varphi](x) = \frac{-1}{2\pi t^3} \int_{\|y\| \leq t} \Delta \varphi(x + y) d^3y + \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\|y\|=t} \Delta \varphi(x + y) dS(y).$$

Setzt man dies in (*) ein, so findet man, dass nur der Randterm zu v_{tt} beiträgt:

$$\begin{aligned} v_{tt} &\stackrel{(*)}{=} 2 \frac{\partial}{\partial t} M(t)[\varphi](x) + t \frac{\partial^2}{\partial t^2} M(t)[\varphi](x) \\ &= \frac{1}{4\pi t} \int_{\|y\|=t} \Delta \varphi(x + y) dS(y) \\ &\stackrel{3.1.15}{=} \frac{t}{4\pi} \int_{\|\xi\|=1} \Delta \varphi(x + t\xi) dS(\xi). \end{aligned}$$

- Andererseits gilt, da wir die Differentiation nach den Variablen x_i mit der Integration über ξ vertauschen können:

$$\Delta v(x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{\|\xi\|=1} \Delta \varphi(x + t\xi) dS(\xi),$$

insgesamt also $\Delta v(x, t) = v_{tt}(x, t)$.

□

Mit ähnlichen Methoden stellt man eine Beziehung zwischen der Wellengleichung in drei Dimensionen und in einer Dimension her, die den Ansatz in Lemma 4.4.9 erklärt. Diese Betrachtungen können allgemein in ungerader Dimension durchgeführt werden.

Satz 4.4.10.

Sei $u: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Lösung der *dreidimensionalen* Wellengleichung $\Delta u - u_{tt} = 0$. Betrachte für einen beliebigen, aber festen Punkt $a \in \mathbb{R}^3$ die sphärische Mittelung

$$\widetilde{M}(r)[u](t) := \frac{1}{4\pi} \int_{\|\xi\|=1} u(a + r\xi, t) dS(\xi) = \int_{\partial B_r(a)} u(\xi, t) dS(\xi).$$

Dann genügt die Funktion

$$v(r, t) := r \cdot \widetilde{M}(r)[u](t)$$

der *eindimensionalen* Wellengleichung

$$v_{rr} - v_{tt} = 0.$$

Beweis.

Wie im Beweis des vorigen Hilfssatzes 4.4.9 genügt es, den Fall $r > 0$ zu betrachten. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \widetilde{M}(r)[u](t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\|\xi\|=1} \frac{\partial}{\partial r} u(a + r\xi, t) dS(\xi) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\|\xi\|=1} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i}(a + r\xi, t) \xi_i \right)}_{\langle \text{grad}_x u(a + r\xi, t), d\vec{S}(\xi) \rangle} dS(\xi) \end{aligned}$$

und nach der Substitution $x := a + r\xi$ folgt mit dem Satz von Gauß 3.2.9

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \widetilde{M}(r)[u](t) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\|x-a\|=r} \langle \text{grad}_x u(x, t), d\vec{S}(x) \rangle \\ &\stackrel{3.2.9}{=} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\|x-a\|\leq r} \Delta u(x, t) d^3x \\ &\stackrel{3.1.15}{=} \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^r \left(\int_{\|x-a\|=\zeta} \Delta u(x, t) dS(x) \right) d\zeta. \end{aligned}$$

Wir rechnen damit weiter

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \widetilde{M}(r)[u](t) \right) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\|x-a\|=r} \Delta u(x, t) dS(x) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\|x-a\|=r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) dS(x) \quad [\text{wegen } \Delta u = u_{tt}] \\ &\stackrel{4.4.8(2)}{=} \frac{r^2}{4\pi} \int_{\|\xi\|=1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(a + r\xi, t) dS(\xi). \end{aligned}$$

Mit dem Differentiationssatz finden wir

$$(*) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \widetilde{M}(r)[u](t) \right) = r^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\widetilde{M}(r)[u](t) \right).$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 (**) \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} v(r, t) &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \widetilde{M}(r)[u](t) \right) \\
 &= 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\widetilde{M}(r)[u](t) \right) + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\widetilde{M}(r)[u](t) \right)
 \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial r^2} v(r, t) &\stackrel{(**)}{=} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \widetilde{M}(r)[u](t) \right) \\
 &\stackrel{(*)}{=} r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\widetilde{M}(r)[u](t) \right) \\
 &\stackrel{\text{Def von } v}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(r, t).
 \end{aligned}$$

□

Wir können nun mit Hilfe von Lemma 4.4.9 das Anfangswertproblem lösen:

Satz 4.4.11.

Seien $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Dann gibt es genau eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$u: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

die eine Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung $\Delta_3 u - u_{tt} = 0$ mit den Anfangswerten

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3$$

ist. Diese Funktion ist explizit gegeben durch

$$u(x, t) := tM(t)[u_1](x) + \frac{\partial}{\partial t}(tM(t)[u_0](x)).$$

Diese Lösung erfüllt auch die in Betrachtung 4.1.2 genannte Forderung 3. der stetigen Abhängigkeit von den Parametern.

Beweis.

1. Nach Lemma 4.4.9 erfüllen die aus den Anfangsbedingungen gewonnenen Funktionen

$$v_j(x, t) := tM(t)[u_j](x) \quad \text{für } j = 0, 1$$

beide die dreidimensionale Wellengleichung. Dabei ist v_0 dreimal stetig differenzierbar, und aus

$$\Delta v_0 - v_{0tt} = 0$$

folgt durch nochmalige Differentiation nach t :

$$\Delta v_{0t} - v_{0ttt} = 0.$$

Also löst auch die Funktion $v_2 := v_{0t}$ und damit $u = v_1 + v_2$ die dreidimensionale Wellengleichung.

2. Wir wollen zeigen, dass die so definierte Funktion u auch die Anfangsbedingungen erfüllt. Wir untersuchen dazu erst einmal die Funktionen v_1 und v_2 getrennt. Nach Definition ist $v_1(x, 0) = 0$ und

$$\frac{\partial}{\partial t} v_1(x, t) = M(t)[u_1](x) + t \frac{\partial}{\partial t} M(t)[u_1](x),$$

also für $t = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_1(x, 0) = M(0)[u_1](x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\|\xi\|=1} u_1(x) dS(\xi) = u_1(x) \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{\|\xi\|=1} dS(\xi)}_{4\pi} = u_1(x).$$

Nun zu der Funktion v_2 . Es ist

$$v_2(x, t) = v_{0t} = M(t)[u_0](x) + t \frac{\partial}{\partial t} M(t)[u_0](x).$$

Für $t = 0$ finden wir, wie oben für die Funktion u_1

$$v_2(x, 0) = M(0)[u_0](x) = u_0(x),$$

und für die Ableitung

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial t} M(t)[u_0](x) + \underbrace{t \frac{\partial^2}{\partial t^2} M(t)[u_0](x)}_{= 0 \text{ für } t = 0}.$$

Wie im Beweis von Lemma 4.4.9 ist

$$\frac{\partial}{\partial t} M(t)[u_0](x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\|\xi\|=1} \langle \text{grad}_x u_0(x + t\xi), \xi \rangle dS(\xi).$$

Für $t = 0$ ergibt das 0 nach dem Satz von Gauß 3.2.9, da der Vektor $\text{grad}_x u_0(x)$ von der Integrationsvariablen ξ nicht abhängt, seine Divergenz bezüglich ξ also 0 ist. Wir finden also

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}(x, 0) = 0$$

und somit zusammenfassend für die Anfangswerte

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= v_1(x, 0) + v_2(x, 0) = u_0(x); \\ u_t(x, 0) &= \frac{\partial v_1}{\partial t}(x, 0) + \frac{\partial v_2}{\partial t}(x, 0) = u_1(x). \end{aligned}$$

3. Ist u eine Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung, so ist nach Satz 4.4.10 die Funktion $v(r, t) := r \cdot \widetilde{M}(r)[u](t)$ eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung und nach Satz 4.4.2 eindeutig bestimmt. Nun bestimmt aber v für $r \neq 0$ die gemittelte Funktion

$$\widetilde{M}(r)[u](t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\|\xi\|=1} u(a + r\xi, t) dS(\xi) = \frac{v}{r}.$$

Da \widetilde{M} im Argument r stetig ist, liegt die Mittelung auch für $r = 0$ fest. Wir finden

$$\widetilde{M}(0)[u](t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\|\xi\|=1} u(a, t) dS(\xi) = u(a, t).$$

Deswegen ist dann auch die Funktion u eindeutig bestimmt.

4. Die Lösung u erfüllt auch die Forderung (3.) der stetigen Abhängigkeit von den Parametern; das wollen wir aber nicht zeigen.

□

Wir untersuchen abschließend die Wellengleichung im \mathbb{R}^2 :

Satz 4.4.12.

Seien $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ und $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Dann gibt es genau eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$u: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x', t) \mapsto u(x', t),$$

die eine Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung $\Delta_2 u - u_{tt} = 0$ mit den Randwerten

$$u(x', 0) = u_0(x'), \quad u_t(x', 0) = u_1(x') \text{ für alle } x' \in \mathbb{R}^2$$

ist. Diese Funktion ist explizit gegeben durch

$$u(x', t) = \overline{M}(t)[u_1](x') + \frac{\partial}{\partial t} (\overline{M}(t)[u_0](x')), \text{ wobei} \\ \overline{M}(t)[u_j](x') := \frac{1}{2\pi} \int_{\|y' - x'\| \leq |t|} \frac{u_j(y')}{\sqrt{t^2 - \|y' - x'\|^2}} d^2 y' \text{ für } j = 0, 1.$$

Beweis.

- Wir benutzen die *Hadamardsche Abstiegsmethode* und führen die Behauptung auf Satz 4.4.11 über die Wellengleichung auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ zurück. Wir betrachten Lösungen der dreidimensionalen Wellengleichung, für die die Anfangswertfunktionen $u_j(x)$ mit $x = (x_1, x_2, x_3) =: (x', x_3)$ nur von x_1 und x_2 , nicht aber von der Koordinaten x_3 abhängen. Dann hängt auch die in Satz 4.4.11 angegebene Lösung

$$u(x, t) = tM(t)[u_1](x) + \frac{\partial}{\partial t} (tM(t)[u_0](x))$$

nur von x_1, x_2 und t ab. Wegen $u_{x_3 x_3} = 0$ erfüllt sie mit der dreidimensionalen auch die zweidimensionale Wellengleichung.

- Wir schreiben nun noch mit Hilfe der Transformation $y := x + t\xi$ die Funktion $tM(t)[u_1](x)$ um:

$$tM(t)[u_j](x) = \frac{t}{4\pi} \int_{\|\xi\|=1} u_j(x + t\xi) dS(\xi) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\|y-x\|=t} u_j(y) dS(y).$$

Nach Wahl der beiden Karten für die zweidimensionale Sphäre $\partial B_t(x) \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\varphi_{\pm}: \{y' \in \mathbb{R}^2 \mid \|y' - x'\| \leq |t|\} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\varphi_{\pm}(y'_1, y'_2) := (y'_1, y'_2, x_3 \pm \sqrt{t^2 - \|y' - x'\|^2})$$

und Bestimmung des Flächenelements erhält man

$$tM(t)[u_j](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\|y' - x'\| \leq |t|} \frac{u_j(y')}{\sqrt{t^2 - \|y' - x'\|^2}} dy_1 dy_2 = \overline{M}(t)[u_j](x').$$

□

Bemerkung 4.4.13.

Wir diskutieren noch die Abhängigkeitsgebiete für die Wellengleichung in zwei und drei Dimensionen.

- Im zweidimensionalen Fall ergibt sich für $(x'_0, t_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ das Abhängigkeitsgebiet

$$\overline{A}_2(x'_0, t_0) = \{x' \in \mathbb{R}^2 \mid \|x' - x'_0\| \leq |t_0|\}.$$

Man beachte, dass eine *Ungleichung* auftritt und eine Vollkugel im \mathbb{R}^2 relevant ist.

- Für den dreidimensionalen Fall betrachte für den Punkt $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ aus der Formel in Satz 4.4.11:

$$u(x_0, t_0) = \frac{t_0}{4\pi} \int_{\|\xi\|=1} u_1(x_0 + t_0\xi) dS(\xi) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{4\pi} \int_{\|\xi\|=1} u_0(x_0 + t\xi) dS(\xi) \right) \Bigg|_{t=t_0}.$$

Die Lösung $u(x_0, t_0)$ hängt also nicht vom Gesamtverlauf der Anfangswerte ab, sondern nur von den Werten auf der Oberfläche der Kugel mit Mittelpunkt x_0 und Radius $|t_0|$, also dem das Abhängigkeitsgebiet

$$\overline{A}_3(x_0, t_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - x_0\| = |t_0|\}.$$

Man beachte, dass hier eine *Gleichung* auftritt.

- Hier ist eine wichtige Dimensionsabhängigkeit festzustellen: Im ein- bzw. zweidimensionalen Fall ist also auch das Abhängigkeitsgebiet \overline{A}_i ein- bzw. zweidimensional, während es im dreidimensionalen Fall nur zweidimensional ist. Würden wir in zwei Raumdimensionen (flatland) leben, so gäbe es z.B. in der Akustik einen solchen Nachhall, dass an Musik in unserem Sinne nicht zu denken wäre.

5 Tensorprodukte und Differentialformen

5.1 Tensorprodukte

Bemerkung 5.1.1.

1. Es sei M eine Menge und X ein \mathbb{K} -Vektorraum. Sei $\mathcal{V}(M)$ der Vektorraum derjenigen \mathbb{K} -wertigen Funktionen auf der Menge M , die nur für endlich viele Element von M einen Wert ungleich Null annehmen. Offenbar bilden die Funktionen $(\delta_m)_{m \in M}$ mit $\delta_m(m') = \delta_{m,m'}$ eine Basis von $\mathcal{V}(M)$. Wir definieren die Abbildung $\delta: M \rightarrow \mathcal{V}(M), m \mapsto \delta_m$.

Einer Abbildung $\varphi: M \rightarrow X$ von Mengen ordnen wir nun die lineare Abbildung $f: \mathcal{V}(M) \rightarrow X$ zu mit $f(\sum_{m \in M} \lambda_m \delta_m) := \sum_{m \in M} \lambda_m \varphi(m)$ mit $\lambda_m \in \mathbb{K}$.

Es gilt hierbei, dass für jeden beliebigen \mathbb{K} -Vektorraum X die Abbildungen von Mengen $M \rightarrow X$ in Bijektion zu den \mathbb{K} -linearen Abbildungen $\mathcal{V}(M) \rightarrow X$ stehen:

$$\text{Lin}(\mathcal{V}(M), X) \cong \text{Abb}(M, X).$$

Umgekehrt ordnen wir dabei einer linearen Abbildung $f: \mathcal{V}(M) \rightarrow X$ die Abbildung $\varphi: M \rightarrow X$ von Mengen zu mit $\varphi(m) := (f \circ \delta)(m) = f(\delta_m)$. Man zeigt leicht, dass diese Zuordnungen zueinander invers sind.

2. Wir wiederholen: Sei \mathbb{K} ein Körper und seien V, W und X gegebene \mathbb{K} -Vektorräume. Dann ist eine \mathbb{K} -bilineare Abbildung eine Abbildung

$$\alpha: V \times W \rightarrow X,$$

die in beiden Argumenten \mathbb{K} -linear ist, für die also $\alpha(\lambda v + \lambda' v', w) = \lambda \alpha(v, w) + \lambda' \alpha(v', w)$ und $\alpha(v, \lambda w + \lambda' w') = \lambda \alpha(v, w) + \lambda' \alpha(v, w')$ für alle $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ und $v, v' \in V, w, w' \in W$ gilt.

3. Offenbar ist dann für jede lineare Abbildung $\phi: X \rightarrow X'$ auch die Abbildung $\phi \circ \alpha: V \times W \rightarrow X'$ bilinear. Wir stellen uns die Frage, ob es für je zwei \mathbb{K} -Vektorräume V, W einen "universellen" \mathbb{K} -Vektorraum $V \otimes W$ mit einer "universellen" bilinearen Abbildung $V \times W \rightarrow V \otimes W$ gibt, so dass *alle* anderen bilinearen Abbildungen $V \times W \rightarrow Z$ durch lineare Abbildungen $V \otimes W \rightarrow Z$ beschrieben werden können. Damit wird die Theorie bilinearer Abbildungen auf die Theorie linearer Abbildungen zurückgeführt.

Definition 5.1.2

Das Tensorprodukt zweier \mathbb{K} -Vektorräume V, W ist ein Paar, bestehend aus einem \mathbb{K} -Vektorraum $V \otimes W$ und einer bilinearen Abbildung

$$\begin{aligned} \kappa: V \times W &\rightarrow V \otimes W \\ (v, w) &\mapsto v \otimes w \end{aligned}$$

mit der folgenden universellen Eigenschaft: Zu jeder bilinearen Abbildung

$$\alpha: V \times W \rightarrow X$$

gibt es genau eine lineare Abbildung $\phi_\alpha: V \otimes W \rightarrow X$ mit

$$\alpha = \phi_\alpha \circ \kappa.$$

Wir drücken dies durch das folgende Diagramm aus:

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{\kappa} & V \otimes W \\
 & \searrow \alpha & \downarrow \exists! \phi_\alpha \\
 & & X
 \end{array}$$

Betrachtung 5.1.3.

- Wir zeigen zunächst, dass das Tensorprodukt, wenn es denn existiert, bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig ist. Angenommen, es gäbe zwei Vektorräume $V \otimes W$ und $V \tilde{\otimes} W$ und zwei universelle bilineare Abbildungen

$$\kappa: V \times W \rightarrow V \otimes W \quad \tilde{\kappa}: V \times W \rightarrow V \tilde{\otimes} W.$$

Man benutzt die universelle Eigenschaft von κ und findet für die spezielle bilineare Abbildung $\tilde{\kappa}$ eine eindeutige lineare Abbildung $\phi_{\tilde{\kappa}}: V \otimes W \rightarrow V \tilde{\otimes} W$ mit $\phi_{\tilde{\kappa}} \circ \kappa = \tilde{\kappa}$.

Durch Vertauschen der Rollen von κ und $\tilde{\kappa}$ erhält man ebenso eine lineare Abbildung $\phi_\kappa: V \tilde{\otimes} W \rightarrow V \otimes W$ mit $\phi_\kappa \circ \tilde{\kappa} = \kappa$. Wir finden

$$\begin{array}{ccc}
 & & V \otimes W \\
 & \nearrow \kappa & \downarrow \phi_{\tilde{\kappa}} \\
 V \times W & \xrightarrow{\tilde{\kappa}} & V \tilde{\otimes} W \\
 & \searrow \kappa & \downarrow \phi_\kappa \\
 & & V \otimes W
 \end{array}$$

Die Abbildungen $\kappa = \text{id}_{V \otimes W} \circ \kappa$ und $\phi_\kappa \circ \phi_{\tilde{\kappa}} \circ \kappa$ beschreiben die gleiche bilineare Abbildung $V \times W \rightarrow V \otimes W$. Wegen der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft folgt $\phi_\kappa \circ \phi_{\tilde{\kappa}} = \text{id}_{V \otimes W}$. Durch Vertauschen der Rollen von κ und $\tilde{\kappa}$ folgt analog $\phi_{\tilde{\kappa}} \circ \phi_\kappa = \text{id}_{V \tilde{\otimes} W}$.

- Um die Existenz des Tensorprodukts zu zeigen, wählen wir eine Basis $\mathcal{B} := \{b_i\}_{i \in I}$ von V und $\mathcal{B}' := \{b'_j\}_{j \in I'}$ von W . Da eine bilineare Abbildung $\alpha: V \times W \rightarrow X$ durch ihre Werte auf allen Paaren (b_i, b'_j) von Basiselementen eindeutig festgelegt ist, betrachten wir die Abbildung von Mengen

$$\begin{aligned}
 \bar{\alpha}: \mathcal{B} \times \mathcal{B}' &\rightarrow X \\
 (b_i, b'_j) &\mapsto \alpha(b_i, b'_j)
 \end{aligned}$$

Diese Abbildung entspricht eindeutig einer linearen Abbildung

$$\phi_\alpha: \mathcal{V}(\mathcal{B} \times \mathcal{B}') \rightarrow X.$$

Wir können also das Tensorprodukt $V \otimes W$ beschreiben durch den Vektorraum $\mathcal{V}(\mathcal{B} \times \mathcal{B}')$ derjenigen \mathbb{K} -wertigen Funktionen auf der Menge $\mathcal{B} \times \mathcal{B}'$, die nur für endlich viele Elemente einen Wert ungleich Null annehmen.

Wir bezeichnen mit $b_i \otimes b'_j$ die Funktion $\delta_{(b_i, b'_j)}$, die auf dem Paar (b_i, b'_j) den Wert Eins und sonst den Wert Null hat. Zusammen mit der bilinearen Abbildung

$$\begin{aligned}
 V \times W &\rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{B} \times \mathcal{B}') \\
 (b_i, b'_j) &\mapsto \delta_{(b_i, b'_j)} = b_i \otimes b'_j
 \end{aligned}$$

erfüllt der Vektorraum $\mathcal{V}(\mathcal{B} \times \mathcal{B}')$ die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts, denn der bilinearen Abbildung $\alpha: V \times W \rightarrow X$ wird die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\phi_\alpha: V \otimes W \rightarrow X$ mit $\phi_\alpha(b_i \otimes b'_j) = \alpha(b_i, b'_j)$ zugeordnet.

3. Insbesondere ist für endlich-dimensionale Vektorräume V, W die Dimension des Tensorprodukts gleich $\dim_{\mathbb{K}} V \otimes W = \dim_{\mathbb{K}} V \cdot \dim_{\mathbb{K}} W$.

4. Die Elemente des Vektorraums $V \otimes W$ heißen *Tensoren*, die Elemente der Form $v \otimes w := \kappa(v, w)$ mit $v \in V$ und $w \in W$ *Tensorprodukte* oder reine Tensoren. Die Tensorprodukte erzeugen $V \otimes W$, aber nicht jedes Element von $V \otimes W$ ist das Tensorprodukt eines Vektors $v \in V$ und $w \in W$.

Bemerkung 5.1.4.

Sind V, W reelle oder komplexe Vektorräume und tragen überdies die Struktur eines Hilbertraums, so ist das Tensorprodukt $V \otimes W$ ein Skalarproduktraum mit einem Skalarprodukt, für das

$$\langle v \otimes w, v' \otimes w' \rangle = \langle v, v' \rangle \cdot \langle w, w' \rangle \quad \text{für alle } v, v' \in V \quad \text{und } w, w' \in W$$

gilt, aber (im unendlichdimensionalen Fall) kein Hilbertraum. Man kann aber $V \otimes W$ als metrischen Raum vervollständigen, indem man alle Cauchy-Folgen hinzunimmt und Cauchy-Folgen identifiziert, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist. Man zeigt dann, dass dieser Raum $V \hat{\otimes} W$ eine natürliche Struktur eines Hilbertraum trägt.

Weiterhin zeigt man (Übg) für Räume quadratintegrabler Funktionen $L^2(\mathbb{R}^p) \hat{\otimes} L^2(\mathbb{R}^q) \cong L^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$.

Wenn die Elemente der Hilberträume V und W Wellenfunktionen quantenmechanischer System beschreiben, so beschreiben Elemente des Hilbertraums $V \hat{\otimes} W$ Wellenfunktion des gekoppelten Systems. Tensorprodukte von Hilberträumen treten natürlich bei der Beschreibung von Systemen mehrerer Teilchen auf. (Bei identischen Teilchen muss man sich auf Unterräume einschränken, um die Bose- oder Fermi-Statistik des Teilchens zu berücksichtigen.)

Wir definieren nun das Tensorprodukt zweier linearer Abbildungen.

Betrachtung 5.1.5.

Je zwei \mathbb{K} -lineare Abbildungen

$$\alpha: V \rightarrow V' \quad \beta: W \rightarrow W'$$

induzieren eine \mathbb{K} -lineare Abbildung der Tensorprodukte

$$\alpha \otimes \beta: V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'.$$

Dazu betrachten wir das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes W \\ \alpha \times \beta \downarrow & & \downarrow \exists! \alpha \otimes \beta \\ V' \times W' & \xrightarrow{\otimes} & V' \otimes W' \end{array} \tag{5}$$

Da die Abbildung $\otimes \circ (\alpha \times \beta)$ bilinear ist, existiert nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\alpha \otimes \beta$. Diese erfüllt also

$$(\alpha \otimes \beta)(v \otimes w) = \alpha(v) \otimes \beta(w) \quad \text{für } v \in V \text{ und } w \in W.$$

Betrachtung 5.1.6.

Wir wollen diese Strukturen nun auch in Koordinaten bezüglich Vektorraumbasen betrachten. Sei \mathbb{K} ein fester Körper und V ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum mit der Basis $\mathcal{B}^{(V)} = (e_1, \dots, e_n)$.

Sei $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{K})$ der Dualraum von V , also der Vektorraum der Linearformen auf V . Die zur Basis $\mathcal{B}^{(V)} = (e_1, \dots, e_n)$ duale Basis $\mathcal{B}^{(V^*)} = (e^1, \dots, e^n)$ besteht aus den Linearformen e^i mit $e^i(e_j) = \delta_{ij}$.

1. Für die Koordinaten nutzt man nun obere (*kontravariante*) und untere (*kovariante*) Indizes wie folgt: Wir schreiben einen Vektor $x \in V$ als

$$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \quad \text{mit } x^i \in \mathbb{K}.$$

Wir schreiben Linearformen, also Vektoren $\beta \in V^*$ im Dualraum, als Linearkombination

$$\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i e^i \quad \text{mit } \beta_i \in \mathbb{K}.$$

Man nennt manchmal einen Vektor $x \in V$ einen *kontravarianten Vektor*, und $\beta \in V^*$ einen *kovarianten Vektor* zu V . Oft vereinbart man, dass über gleiche oben und unten stehende Indizes summiert werden muss, und lässt das Summenzeichen weg. Dies ist die *Einsteinsche Summationskonvention*, die in Differentialgeometrie und allgemeiner Relativitätstheorie häufig verwendet wird.

2. Seien V, V' endlich-dimensionale Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}^{(V)} = (e_1, \dots, e_n)$ und $\mathcal{B}^{(V')} = (e'_1, \dots, e'_m)$. Eine lineare Abbildung $\Phi: V \rightarrow V'$ beschreiben wir durch die Bilder der Basisvektoren

$$\Phi(e_i) = \sum_{k=1}^m a^k_i e'_k = a^k_i e'_k$$

unter Verwendung der Einsteinschen Summationskonvention. (a^i_j) ist die darstellende Matrix von Φ .

Sind weiterhin W, W' endlich-dimensionale \mathbb{K} -Vektorräume und $\Psi: W \rightarrow W'$ eine lineare Abbildung, und ist $\mathcal{B}^{(W)} = (f_1, \dots, f_p)$ Basis von W , $\mathcal{B}^{(W')} = (f'_1, \dots, f'_q)$ Basis von W' , $\Psi(f_j) = b^l_j f'_l$. Dann folgt aus dem kommutierenden Diagramm (5) in Betrachtung 5.1.5 für einen allgemeinen Tensor $x^{ij} e_i \otimes f_j \in V \otimes V'$

$$(\Phi \otimes \Psi)(x^{ij} e_i \otimes f_j) = x^{ij} a^k_i b^l_j e'_k \otimes f'_l.$$

Man sagt, "obere Indizes werden kovariant transformiert":

$$(x^{ij}) \mapsto (a^k_i b^l_j x^{ij}).$$

Handelt es sich bei den Basen um Orthonormalbasen und bei den linearen Abbildungen Φ, Ψ um orthogonale Abbildungen, so sind für die Transformation von Tensoren $x_{ij} e^i \otimes f^j$ statt den Einträgen der darstellenden Matrizen jeweils die Einträge ihrer Transponierten zu verwenden.

Bemerkungen 5.1.7.

1. Aus der Bilinearität von κ folgt, dass sich auch das Tensorprodukt von Abbildungen bilinear verhält:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2) \otimes \psi &= \lambda_1 \phi_1 \otimes \psi + \lambda_2 \phi_2 \otimes \psi, \\ \phi \otimes (\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2) &= \phi \otimes \lambda_1 \psi_1 + \phi \otimes \lambda_2 \psi_2. \end{aligned}$$

2. Ebenso folgt für Vektorräume die Verträglichkeit mit direkten Summen:

$$(V_1 \oplus V_2) \otimes W \cong (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W),$$

und analog im anderen Argument.

3. Man hat kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} a_{U,V,W}: U \otimes (V \otimes W) &\rightarrow (U \otimes V) \otimes W \\ u \otimes (v \otimes w) &\mapsto (u \otimes v) \otimes w \end{aligned}$$

mit deren Hilfe man die \mathbb{K} -Vektorräume $U \otimes (V \otimes W)$ und $(U \otimes V) \otimes W$ identifizieren kann. Das Tensorprodukt ist dann assoziativ.

4. Die Skalarmultiplikation in V liefert kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \otimes V &\xrightarrow{\sim} V & V \otimes \mathbb{K} &\rightarrow V \\ \lambda \otimes v &\mapsto \lambda \cdot v & v \otimes \lambda &\mapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

mit Umkehrabbildung $v \mapsto 1 \otimes v$ bzw. $v \mapsto v \otimes 1$, mit deren Hilfe man den Grundkörper \mathbb{K} als Eins unter dem Tensorprodukt auffassen kann.

5. Man hat kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} c_{U,V}: U \otimes V &\rightarrow V \otimes U \\ u \otimes v &\mapsto v \otimes u, \end{aligned}$$

mit deren Hilfe man die Faktoren vertauschen kann. Es gilt $c_{V,U} \circ c_{U,V} = \text{id}_{U \otimes V}$.

6. Benutzen wir das assoziative Tensorprodukt, so können wir zu jedem \mathbb{K} -Vektorraum V die *Tensoralgebra*

$$T(V) := V^{(0)} \oplus V^{(1)} \oplus V^{(2)} \oplus \dots,$$

mit $V^{(0)} := \mathbb{K}$ und $V^{(j)} := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_j$ mit j Faktoren, bilden. Durch das Produkt

$$\begin{aligned} V^{(j)} \times V^{(l)} &\rightarrow V^{(j+l)} \\ (v_1 \otimes \dots \otimes v_j, w_1 \otimes \dots \otimes w_l) &\mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_j \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_l \end{aligned}$$

wird $T(V)$ zu einer \mathbb{K} -Algebra, d.h. dass der gegebene \mathbb{K} -Vektorraum mit einem Produkt versehen ist, das bezüglich der Vektoraddition distributiv ist. Genauer ist $T(V)$ eine \mathbb{Z}_+ -graduierte assoziative \mathbb{K} -Algebra. Sie ist unendlich-dimensional, falls V nicht der Nullvektorraum ist. Die Tensoralgebra von Hilberträumen (und Unterräume davon) tritt in natürlicher Weise bei der Beschreibung von Systemen der Quantenstatistik auf, bei denen die Teilchenzahl nicht fest ist.

Bemerkungen 5.1.8.

1. Für endlich-dimensionale Vektorräume ist die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} V^* \otimes W^* &\rightarrow (V \otimes W)^* \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto (v \otimes w \mapsto \alpha(v) \cdot \beta(w)) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

2. Insbesondere können wir Bilinearformen auf $V \times W$ mit Linearformen auf $V \otimes W$, also Elementen in $(V \otimes W)^*$ identifizieren und somit durch Tensoren in $V^* \otimes W^*$ beschreiben. In der Beschreibung durch Komponenten treten zwei untere "kovariante" Indizes auf.

3. Wir hatten den Maßtensor einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ kennengelernt. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ und $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung. Sei für $u \in U$ das Bild $p := \varphi(u) \in M$ und $(\partial_1\varphi, \dots, \partial_k\varphi)$ eine Basis des Tangentialraums T_pM . Dann liefert die Restriktion des euklidischen Skalarprodukts des umgebenden Raums \mathbb{R}^n auf T_pM eine (positiv definite) Bilinearform $T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ und somit einen Tensor in $(T_pM)^* \otimes (T_pM)^*$.
4. Für endlich-dimensionale Vektorräume ist die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} V^* \otimes W &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ \alpha \otimes w &\mapsto (v \mapsto \alpha(v)w) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Insgesamt ermöglicht dies einen Kalkül für *endlich-dimensionale* Vektorräume, bei dem alle Homomorphismen – insbesondere multilineare Abbildungen und Multilinearformen – durch geeignete Tensoren beschrieben werden.

Bemerkungen 5.1.9.

1. Hat man in allen Vektorräumen eine Basis gewählt, so kann man Tensoren durch ihre Koordinaten beschreiben:
 $(x^{i_1 \dots i_k}{}_{j_1 \dots j_l})$ beschreibt einen Tensor in $V_1 \otimes \dots \otimes V_k \otimes W_1^* \otimes \dots \otimes W_l^*$.
 Eine (orthogonale) Basiswechselabbildung im ν -ten Faktor V_ν

$$e'_i = t^j{}_i e_j$$

führt dann für den Tensor zu neuen Koordinaten $(t^i{}_j x^{i_1 \dots j \dots})$. Für untere (“kovariante”) Indizes ist entsprechend die zu t transponierte Matrix zu nehmen.

2. Auf dem Raum der Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraums ist die Spur eine wichtige Linearform:

$$\begin{aligned} \text{tr}: \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \cong V^* \otimes V &\rightarrow \mathbb{K} \\ x^i{}_j e^j \otimes e_i &\mapsto x^i{}_j e^j(e_i) = \sum_i x^i{}_i = x^i{}_i \end{aligned}$$

Im Tensorkalkül setzt man also einen oberen und einen unteren Index gleich und summiert darüber. Diese Operation nennt man auch das *Verjüngen eines Tensors*. Auch ein Tensor mit mehr als einem oberen und unterem Index zum gleichen Vektorraum kann verjüngt werden; dies entspricht einer partiellen Spur.

Definition 5.1.10

1. Eine alternierende k -Form auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V ist eine Abbildung

$$\omega: V^k \rightarrow \mathbb{K},$$

die in jedem Argument linear ist, also eine multilineare Abbildung ist, und die verschwindet, sobald wenigstens zwei Argumente gleich sind:

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = 0,$$

sobald es i, j mit $i \neq j$ gibt, so dass $v_i = v_j$.

2. Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichnet man mit $\Lambda^k V^*$ den Vektorraum aller alternierenden k -Formen $V^k \rightarrow \mathbb{K}$. Speziell setzt man $\Lambda^0 V^* := \mathbb{K}$. Es ist $\Lambda^1 V^* = V^*$.

Bemerkungen 5.1.11.

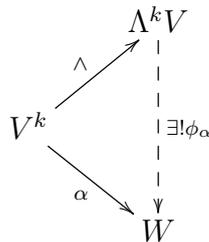
1. Eine alternierende k -Form kann durch eine lineare Abbildung $\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_k \rightarrow \mathbb{K}$ beschrieben werden.
2. Allgemeiner ist eine alternierende k -lineare Abbildung eine Abbildung

$$\alpha: V \times V \times \dots \times V \rightarrow W$$

mit der Eigenschaft, dass

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \text{sign}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

Definition 5.1.12 Das k -fache äußere Produkt eines \mathbb{K} -Vektorraums V ist ein Vektorraum $\Lambda^k(V)$, zusammen mit einer k -multilinearen alternierenden Abbildung $\wedge: V \times \dots \times V \rightarrow \Lambda^k V$, so dass es für jede k -lineare alternierende Abbildung $\alpha: V^k \rightarrow W$ genau eine lineare Abbildung $\phi_\alpha: \Lambda^k V \rightarrow W$ gibt, so dass das Diagramm



kommutiert.

Bemerkungen 5.1.13.

1. Durch diese universelle Eigenschaft ist $\Lambda^k V$ bis auf eindeutige Isomorphie charakterisiert. Die Existenz des äußeren Produkts zeigt man, indem man den Vektorraum $\Lambda^k V = \underbrace{(V \otimes \dots \otimes V)}_k / L$ mit L dem linearen Erzeugnis

$$L := \text{span} (v_1 \otimes \dots \otimes v_k - \text{sign}(\sigma)v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)} \mid \sigma \in S_k, v_j \in V)$$

betrachtet.

2. Wir schreiben

$$\wedge(v_1, \dots, v_k) =: v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k \in \Lambda^k V.$$

Wir werden gleich diesen Ausdruck noch einmal anders für den Fall von Linearformen einführen, also für $\Lambda^k V^*$.

Da die Abbildung $\wedge: V^k \rightarrow \Lambda^k V$ alternierend ist, gilt

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = \text{sign}(\sigma) v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(k)}.$$

3. Eine alternierende k -Form auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V kann als ein Element (eines Unterraums) des \mathbb{K} -Vektorraums $(V^{\otimes k})^*$ angesehen werden. Diese kann man natürlich als Elemente in der Komponente $(V \otimes \dots \otimes V)^* \cong V^* \otimes \dots \otimes V^*$ der Tensoralgebra TV^* des Dualraums auffassen.

Allerdings ist das Produkt zweier alternierender k -Formen in der Tensoralgebra nicht mehr alternierend. Wir müssen daher für alternierende Formen ein anderes Produkt einführen.

Definition 5.1.14

Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$ Linearformen. Wir definieren das äußere Produkt oder Dachprodukt $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k V^*$ durch

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) := \det((\varphi_l(v_j))_{1 \leq l, j \leq k})$$

Bemerkung 5.1.15.

Man zeigt leicht: Ist $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis von V^* , so bilden die Elemente $\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_k}$ mit $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ eine Basis von $\Lambda^k V^*$.

Dazu betrachte eine zu (φ_i) duale Basis $(e_i)_i$ von V . Man zeigt dann, dass eine beliebige alternierende Form $\omega \in \Lambda^k V^*$ sich eindeutig schreiben lässt als

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}.$$

Es folgt $\dim_{\mathbb{K}} \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$ für $0 \leq k \leq n$ und $\dim_{\mathbb{K}} \Lambda^k V^* = 0$ für $k > n$.

Satz 5.1.16.

Es gibt genau eine bilineare Abbildung (genannt *äußeres Produkt* oder *Dachprodukt*)

$$\begin{aligned} \wedge: \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* &\rightarrow \Lambda^{k+l} V^* \\ (\omega, \sigma) &\mapsto \omega \wedge \sigma, \end{aligned}$$

mit der Eigenschaft, dass

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) \wedge (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_l) = (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \wedge \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_l)$$

für alle 1-Formen $\varphi_j, \psi_j \in V^*$.

Definition 5.1.17

1. Wir definieren das äußere Produkt oder Dachprodukt alternierender Formen durch die Abbildung aus Satz 5.1.16. Speziell setzt man für $a \in \mathbb{K} \cong \Lambda^0 V$: $a \wedge \omega = \omega \wedge a = a \cdot \omega$.
2. Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V nennt man die direkte Summe

$$\Lambda V = \bigoplus_{k=0}^{\dim V} \Lambda^k V$$

die äußere Algebra von V .

Bemerkungen 5.1.18.

1. Die Dimension der äußeren Algebra eines Vektorraums V der Dimension $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ ist

$$\dim_{\mathbb{K}} \Lambda V = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Insbesondere ist die äußere Algebra eines endlich-dimensionalen Vektorraums endlich-dimensional.

2. Unmittelbar aus der Definition folgt, dass das Dachprodukt assoziativ ist,

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$$

für alle $\omega_i \in \Lambda^{k_i}$ und alle Werte von $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$. Ferner ist das Dachprodukt alternierend: Für $\omega \in \Lambda^k V$ und $\sigma \in \Lambda^l V$ gilt

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{kl} \sigma \wedge \omega. \quad (6)$$

3. Die äußere Algebra von Hilberträumen tritt in natürlicher Weise bei der Beschreibung von fermionischen Vielteilchensystemen auf.

5.2 Differentialformen und der Stokessche Integralsatz

Wir folgen [F, §19-§21].

Betrachtung 5.2.1.

- Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Bei der Einführung des Differentials hatten wir df als Abbildung

$$U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*, p \mapsto df(p) = df_p$$

aufgefasst. Für jedes $p \in U$ ist \mathbb{R}^n der Tangentialraum $T_p U$ der n -dimensionalen Untermannigfaltigkeit U .

- Wir wollen im Folgenden die Tangentialräume $T_p U$ für verschiedene p auseinanderhalten. Wenn wir die Vereinigung $\sqcup_{p \in U} T_p U$ bilden, so sei diese stets disjunkt:

$$\bigsqcup_{p \in U} T_p U = \bigcup_{p \in U} \{p\} \times T_p U.$$

Man nennt den Dualraum $T_p^* U := (T_p U)^*$ auch den *Kotangentialraum* von U in p . Ebenso betrachtet man wieder die disjunkte Vereinigung $\sqcup_{p \in U} T_p^* U$.

- Wir fassen jetzt das Differential df auf als Abbildung

$$U \rightarrow \sqcup_{p \in U} T_p^*U \text{ mit } p \mapsto df(p) \in T_p^*U,$$

wobei die Linearform $df(p) \in T_p^*U$ auf einem Tangentialvektor $v \in T_pU$ den Wert

$$df(p)(v) := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \cdot v_j$$

hat.

- Speziell betrachten wir für die Koordinatenfunktionen x_j jetzt die Differentiale $dx_j: U \rightarrow \sqcup_{p \in U} T_p^*U$. Sei e_1, \dots, e_n die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n \cong T_pU$; es gilt

$$dx_j(e_i) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \delta_{k,i} = \delta_{i,j}.$$

Also ist für jedes p die Menge $dx_1(p), \dots, dx_n(p)$ die zur kanonischen Basis e_1, \dots, e_n von $\mathbb{R}^n \cong T_pU$ duale Basis von $T_p^*U \cong \mathbb{R}^n$, und es gilt

$$df(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \cdot dx_j(p).$$

Im Sinne der folgenden Definition ist das *totale Differential* df von f eine Differentialform erster Ordnung.

Definition 5.2.2

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Unter einer Differentialform der Ordnung k oder kurz einer k -Form auf U versteht man eine Abbildung

$$\omega: U \rightarrow \bigsqcup_{p \in U} \Lambda^k T_p^*U \text{ mit } \omega(p) \in \Lambda^k T_p^*U.$$

Bemerkung 5.2.3.

Nach Bemerkung 5.1.15 ist für jedes $p \in U$ durch $dx_{j_1}(p) \wedge \dots \wedge dx_{j_k}(p)$, $1 \leq j_1 \dots < j_k \leq n$ eine Basis von $\Lambda^k T_p^*U$ gegeben, und jede k -Form ω auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ lässt sich also darstellen als

$$\omega(p) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} f_{j_1 \dots j_k}(p) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizientenfunktionen $f_{j_1 \dots j_k}: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 5.2.4

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} f_{j_1 \dots j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

eine k -Form auf U .

1. Die Differentialform ω heißt stetig differenzierbar (bzw. stetig, bzw. r -mal stetig differenzierbar), wenn alle $\binom{n}{k}$ Koeffizientenfunktionen $f_{j_1 \dots j_k}$ diese Eigenschaft haben.
2. Für eine stetig differenzierbare Differentialform ω der Ordnung k definieren wir nun eine $(k+1)$ -Form $d\omega$, die äußere Ableitung der Differentialform ω , durch

$$d\omega := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} df_{j_1 \dots j_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}.$$

Natürlich lässt sich $d\omega$ dann als Linearkombination der Basiselemente $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k+1}}$ ausdrücken: Man schreibt

$$d\omega := \sum_{j=1}^n \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \frac{\partial f_{j_1 \dots j_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

und ordnet die Indizes so um, dass sie strikt monoton wachsend angeordnet sind.

Satz 5.2.5.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

1. (Linearität) Seien ω_1, ω_2 stetig differenzierbare k -Formen auf U und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$d(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda d\omega_1 + \mu d\omega_2.$$

2. (Leibnizregel) Sei ω eine stetig differenzierbare k -Form und η eine stetig differenzierbare l -Form. Dann gilt

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

3. Für jede zweimal stetig differenzierbare k -Form ω auf U gilt $d(d\omega) = 0$.

Beweis.

1. Die erste Behauptung ist eine Folge der Differentiationsregeln.
2. Die zweite Behauptung folgt aus der Produktregel für die Koeffizientenfunktionen und der graduierten Symmetrie (6) aus Bemerkung 5.1.18.1: Für

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I \quad \text{und} \quad \eta = \sum_{|J|=l} g_J dx_J$$

gilt

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{I,J} (g_J df_I + f_I dg_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (\sum_I df_I \wedge dx_I) \wedge (\sum_J g_J dx_J) + (-1)^k (\sum_I f_I \wedge dx_I) \wedge (\sum_J dg_J \wedge dx_J) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

3. Die dritte Behauptung folgt aus der Symmetrie der Hesseschen Matrix:

$$d^2\omega = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} = 0.$$

□

Wir führen weitere Notation ein:

Definition 5.2.6

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, wobei \mathbb{R}^n mit der Standard-Orientierung versehen ist.

1. Das vektorielle Linienelement ist das n -Tupel von 1-Formen $d\vec{s} := (dx_1, \dots, dx_n)^T$ auf U .
2. Das vektorielle (Hyper-)Flächenelement ist das n -Tupel von $(n - 1)$ -Formen, $d\vec{S} := (dS_1, \dots, dS_n)^T$ auf U mit

$$dS_i := (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \overbrace{dx_i}^{\text{auslassen}} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Beispiel 5.2.7.

Wir betrachten Differentialformen auf dem \mathbb{R}^n mit der Standard-Orientierung. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir betrachten Differentialformen verschiedener Ordnung und ihre äußeren Ableitungen.

1. Eine stetig differenzierbare 0-Form auf U ist eine stetig differenzierbare Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Ihr Differential $df = \partial_1 f dx^1 + \dots + \partial_n f dx^n = \langle \text{grad } f, d\vec{s} \rangle$ ist eine 1-Form.
2. Betrachte das *Volumenelement* $dV := dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. Jede stetig differenzierbare n -Form auf U ist von der Form $c dV$ mit einer stetig differenzierbaren Koeffizientenfunktion $c: U \rightarrow \mathbb{R}$, und hat äußere Ableitung 0.
3. Sei ψ eine stetig differenzierbare $(n - 1)$ -Form. Schreiben wir mit einem Vektorfeld b und dem vektoriellen Hyperflächenelement $d\vec{S}$,

$$\psi = \langle b, d\vec{S} \rangle = b_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - b_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots + (-1)^{n-1} b_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1},$$

so ist die äußere Ableitung die n -Form

$$d\psi = (\partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 + \dots + \partial_n b_n) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = (\text{div } b) \cdot dV.$$

Konkret für $n = 3$ sieht dies so aus: Die 2-Form

$$\psi = \langle b, d\vec{S} \rangle = b_1 dx_2 \wedge dx_3 + b_2 dx_3 \wedge dx_1 + b_3 dx_1 \wedge dx_2$$

hat die äußere Ableitung

$$d\psi = (\partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 + \partial_3 b_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (\text{div } b) \cdot dV.$$

4. Sei φ eine stetig differenzierbare 1-Form auf dem \mathbb{R}^3 . Wir schreiben dann die 1-Form mit einem Vektorfeld a in der Form $\varphi = \langle a, d\vec{s} \rangle$, und rechnen nach, dass gilt:

$$\begin{aligned} d\varphi &= (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) dx_1 \wedge dx_2 + (\partial_1 a_3 - \partial_3 a_1) dx_1 \wedge dx_3 + (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) dx_2 \wedge dx_3 \\ &= \langle \text{rota}, d\vec{S} \rangle \end{aligned}$$

mit dem vektoriellen Flächenelement $d\vec{S} = (dx_2 \wedge dx_3, -dx_1 \wedge dx_3, dx_1 \wedge dx_2)^T$.

Wir haben so die Differentialoperatoren Rotation, Divergenz und Gradient durch Differentialformen verstanden.

Definition 5.2.8

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

1. Eine stetig differenzierbare k -Form ω auf U heißt geschlossen, falls $d\omega = 0$ gilt.
2. Für $k \geq 1$ heißt eine stetige k -Form ω auf U exakt, falls es eine stetig differenzierbare $(k - 1)$ -Form η auf U gibt, so dass $\omega = d\eta$ gilt.

Lemma 5.2.9.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Jede auf U stetig differenzierbare exakte k -Form ist geschlossen.

Beweis.

Zu einer exakten k -Form ω finden wir nach Definition 5.2.8 eine $(k - 1)$ -Form η mit $\omega = d\eta$. Dann gilt wegen Satz 5.2.5.3

$$d\omega = d^2\eta = 0.$$

□

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $x_0 \in U$ gibt, so dass für jeden Punkt $x \in U$ die Verbindungsstrecke $\overline{x_0x}$ ganz in U liegt.

Theorem 5.2.10. [Lemma von Poincaré.]

Ist eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig, so ist jede geschlossene k -Form auf U mit $k \geq 1$ auch exakt.

Beweis.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_0 = 0$. Es reicht aus, k -Formen der Form

$$\omega = f(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

auf U zu betrachten. Hierzu definieren wir die $(k - 1)$ -Form

$$I(\omega) := \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \right] x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

wobei die 1-Form dx_{i_α} ausgelassen wird. Das Integral ist definiert, weil $tx \in U$ liegt, da U sternförmig ist. Dann gilt

$$(*) \quad \omega = d(I(\omega)) + I(d\omega).$$

Für eine geschlossen Form ω folgt hieraus sofort $\omega = d(I(\omega))$, so dass ω exakt ist.

Die Gleichung (*) folgt durch direkte Rechnung: Es gilt

$$\begin{aligned} dI\omega &= \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} x_{i_\alpha} d \left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \right] dx_{i_\alpha} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} x_{i_\alpha} d \left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \right] \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + k \left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

Wir schreiben das Integral im zweiten Summanden um:

$$\begin{aligned} k \int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt &= t^k f(tx) \Big|_0^1 - \int_0^1 t^k \sum_{\beta=1}^n \partial_\beta f(tx) x_\beta dt \\ &= f(x) - \int_0^1 t^k \sum_{\beta=1}^n \partial_\beta f(tx) x_\beta dt \end{aligned}$$

und rechnen die Ableitung des Integrals im ersten Summanden aus:

$$d \left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \right] = \sum_{\beta=1}^n \left[\int_0^1 t^k \partial_\beta f(tx) dt \right] dx_\beta.$$

Damit finden wir insgesamt für den ersten Summanden in (*):

$$\begin{aligned} dI\omega &= \sum_{\alpha=1}^k \sum_{\beta=1}^n (-1)^{\alpha-1} \left[\int_0^1 t^k \partial_\beta f(tx) dt \right] x_{i_\alpha} dx_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + f(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} - \left[\int_0^1 t^k \sum_{\beta=1}^n \partial_\beta f(tx) x_\beta dt \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Wir berechnen auch explizit den zweiten Summanden in (*): wir finden

$$d\omega = \sum_{\beta=1}^n \partial_\beta f(x) dx_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

und somit

$$\begin{aligned} Id\omega &= \sum_{\beta=1}^n \left[\int_0^1 dt \cdot t^k \partial_\beta f(tx) \right] x_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^n \sum_{\alpha=1}^k (-1)^\alpha \left[\int_0^1 dt \cdot t^k \partial_\beta f(tx) \right] x_{i_\alpha} dx_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

Der Vergleich liefert nun (*). □

Bemerkung 5.2.11.

Aus dem Poincaréschen Lemma, zusammen mit den Beispielen 5.2.7, folgt für jede sternförmige offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$:

1. Ist $a: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\text{rota} = 0$, so existiert eine stetig differenzierbare Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a = \text{grad } f$.

Denn führt man wie in Beispiel 5.2.7.4 eine 1-Form $\varphi := \langle a, d\vec{s} \rangle$ ein; dann ist

$$d\varphi \stackrel{5.2.7.3}{=} \langle \text{rota}, d\vec{S} \rangle = 0.$$

Nach dem Poincaréschen Lemma 5.2.10 gibt es eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi = df \stackrel{5.2.7.1}{=} \langle \text{grad } f, d\vec{s} \rangle$$

also $a = \text{grad } f$.

In der Elektrostatik gilt für das elektrische Feld $\text{rot } E = 0$. Daher gibt es eine skalare Funktion V , das elektrische Potential, mit $-\text{grad } V = E$.

2. Ist $b: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\text{div } b = 0$, so existiert ein stetig differenzierbares Vektorfeld $a: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $b = \text{rota}$.

Zum Beweis führen wir wie in Beispiel 5.2.7.3 eine 2-Form $\psi := \langle b, d\vec{S} \rangle$ ein; dann ist nach 5.2.7.3 die äußere Ableitung $d\psi = \text{div } b dV = 0$. Nach dem Poincaréschen Lemma 5.2.10

gibt es eine 1-Form φ mit $\psi = d\varphi$. Schreiben wir $\varphi = \langle a, d\vec{s} \rangle$ mit einem Vektorfeld a , so folgt

$$\langle \text{rota}, d\vec{S} \rangle \stackrel{5.2.7.4}{=} d\varphi = \psi = \langle b, d\vec{S} \rangle$$

und somit $b = \text{rota}$.

Für das magnetische Feld gilt $\text{div } B = 0$; also existiert ein Vektorfeld A , das Vektorpotential, so dass $B = \text{rot}A$.

Definition 5.2.12

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, sei

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} f_{j_1 \dots j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

eine k -Form auf U und $\varphi: V \rightarrow U$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist

$$\varphi^* \omega := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} (f_{j_1 \dots j_k} \circ \varphi) d\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{j_k}.$$

eine k -Form auf V , der Rücktransport oder Pullback $\varphi^* \omega$.

Wir halten ohne Beweis die wichtigsten Eigenschaften des Rücktransports fest:

Satz 5.2.13.

1. Der Rücktransport φ^* ist linear: für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und ω_1, ω_2 k -Formen gilt

$$\varphi^*(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 \varphi^*(\omega_1) + \lambda_2 \varphi^*(\omega_2).$$

2. Der Rücktransport ist verträglich mit dem Dachprodukt,

$$\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta).$$

3. Der Rücktransport ist verträglich mit der äußeren Ableitung: Ist φ zweimal stetig differenzierbar und ω eine stetig differenzierbare k -Form, so gilt

$$d(\varphi^* \omega) = \varphi^*(d\omega).$$

4. Ist weiterhin $W \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $\psi: W \rightarrow V$ stetig differenzierbar, so ist

$$(\varphi \circ \psi)^* \omega = \psi^*(\varphi^* \omega).$$

Wir brauchen explizitere Formeln für den Rücktransport.

Beispiel 5.2.14.

Seien $V \subseteq \mathbb{R}^m$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, $\varphi: V \rightarrow U$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Die Differentiale der Koeffizientenfunktionen $\varphi_i: V \rightarrow \mathbb{R}$ liefern 1-Formen

$$d\varphi_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j.$$

1. Für den Rücktransport einer 1-Form $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ auf U finden wir deshalb

$$\varphi^* \omega = \sum_{i=1}^n (f_i \circ \varphi) d\varphi_i = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n (f_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \right) dt_j$$

2. Sei $k = m$, so dass die zurückgezogene Form höchstmöglichen Grad hat. Da Differentialformen alternierend sind, folgt

$$d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k} = \det \frac{\partial(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k.$$

Es folgt für den Rücktransport einer m -Form auf \mathbb{R}^n zu einer m -Form auf \mathbb{R}^m :

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$\varphi^* \omega = \left(\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} (f_{i_1 \dots i_k} \circ \varphi) \det \frac{\partial(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)} \right) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k.$$

3. Insbesondere gilt im Fall $m = k = n$ für $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

$$\varphi^* \omega = f \circ \varphi (\det d\varphi) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n. \quad (7)$$

Formen höchstmöglichen Grades transformieren sich also mit der Determinante.

Definition 5.2.15

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine n -Form

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

auf U heißt über $A \subseteq U$ integrierbar, wenn die Koeffizientenfunktion f über A im üblichen Lebesgueschen Sinne integrierbar ist. Dann setzt man

$$\int_A \omega := \int_A f(x) d^n x.$$

Insbesondere existiert für jede stetige n -Form das Integral über jedes Kompaktum $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 5.2.16

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Gilt für alle $x \in U$, dass $\det((d\varphi)_x) > 0$, bzw. dass $\det((d\varphi)_x) < 0$, so heißt der Diffeomorphismus φ orientierungserhaltend, bzw. orientierungsumkehrend.

Satz 5.2.17.

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi: U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Sei U wegzusammenhängend; dann ist φ entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend. Sei

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

eine stetige n -Form auf V . Sei $A \subseteq U$ Kompaktum. Ist φ orientierungserhaltend, so gilt

$$\int_{\varphi(A)} \omega = \int_A \varphi^* \omega;$$

ist φ orientierungsumkehrend, so gilt

$$\int_{\varphi(A)} \omega = - \int_A \varphi^* \omega.$$

Beweis.

Das folgt sofort aus dem Transformationsverhalten (7) von Differentialformen in Beispiel 5.2.14 und dem Transformationssatz für Integrale. \square

Definition 5.2.18

Sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .

1. Unter einem Atlas \mathfrak{A} für M versteht man eine Menge $\{\varphi_j: T_j \rightarrow V_j : j \in J\}$ von Karten von M , deren Bilder M überdecken, also $\bigcup_j V_j = M$.
2. Lässt sich für M ein Atlas \mathfrak{A} finden, so dass für je zwei sich schneidende Karten aus \mathfrak{A} der zugehörige Kartenwechsel-Diffeomorphismus τ orientierungserhaltend ist, so nennt man die Untermannigfaltigkeit M orientierbar. (Orientierbarkeit ist eine Eigenschaft.)
3. Ist M versehen mit einem solchen Atlas, so nennen wir (M, \mathfrak{A}) eine durch den Atlas \mathfrak{A} orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit. (Die Wahl einer Orientierung ist eine Struktur.)
4. Alle weiteren Karten von M , die wir einem Atlas \mathfrak{A} , der eine Orientierung definiert, hinzufügen können, so dass der Atlas immer noch eine Orientierung definiert, nennen wir positiv orientiert; alle anderen Karten negativ orientiert.

Man kann eine Orientierung einer Untermannigfaltigkeit M als Äquivalenzklasse von Atlanten verstehen. Wenn M zusammenhängend ist, so gilt: Entweder ist M nicht orientierbar, oder es existieren genau zwei Orientierungen: Zu jeder Orientierung \mathfrak{A} gibt es auch noch die entgegengesetzte Orientierung $-\mathfrak{A}$.

Definition 5.2.19

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ω eine stetige k -Form auf U . Sei (M, \mathfrak{A}) eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n mit $M \subseteq U$. Sei A eine kompakte Teilmenge der Untermannigfaltigkeit M .

Es soll das Integral von der k -Form ω über (M, \mathfrak{A}) erklärt werden. Man beachte, dass der Grad der Form gleich der Dimension der Untermannigfaltigkeit ist.

- In dem Fall, in dem es eine einzige Karte $\varphi: T \xrightarrow{\sim} V \subseteq M$ gibt mit $A \subseteq V$, setzt man

$$\int_{(A, \mathfrak{A})} \omega := \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega.$$

Aus Satz 5.2.17 und Satz 5.2.13 folgt, dass dies unabhängig von der gewählten Karte φ ist.

- Es gebe nun endlich viele bezüglich \mathfrak{A} positiv orientierte Karten

$$\varphi_j: T_j \xrightarrow{\sim} V_j \subseteq M, j = 1, \dots, m, \text{ mit}$$

$$A \subseteq \bigcup_j V_j$$

mit einer der Überdeckung $(V_j)_j$ untergeordneten lokal-integrierbaren stetigen Teilung der Eins

$$\alpha_j: \bigcup_l V_l \longrightarrow \mathbb{R} \text{ für } j = 1, \dots, m.$$

Wir setzen

$$A_j := A \cap \text{supp}(\alpha_j) \subseteq V_j.$$

und nennen die k -Form ω integrierbar über A , falls ω über alle A_j im Sinne der vorgehenden Betrachtung integrierbar ist. Dann setzen wir

$$\int_{(A, \mathfrak{A})} \omega := \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(A_j)} (\alpha_j \circ \varphi_j) \cdot (\varphi_j^* \omega).$$

Man zeigt (wie bei der Definition des Integrals über Untermannigfaltigkeiten), dass diese Definition der Integrierbarkeit und des Integrals unabhängig von der Wahl der Karten und der Teilung der Eins ist.

Definition 5.2.20

1. Sei (M, \mathfrak{A}) eine durch den Atlas \mathfrak{A} orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n und φ eine bezüglich \mathfrak{A} positiv orientierte Karte. Man nennt für einen Punkt $p \in M$ die Basis $((\partial_1 \varphi)(p), \dots, (\partial_k \varphi)(p))$ des Tangentialraums $T_p M$ und alle gleich-orientierten Basen des Vektorraums $T_p M$ (bezüglich \mathfrak{A}) positiv orientiert.
2. Ist $n \geq 2$ und M spezieller eine Hyperfläche im \mathbb{R}^n mit der Standard-Orientierung, so ist ein bezüglich \mathfrak{A} positiv orientiertes Einheits-Normalenfeld auf M ein stetiges Vektorfeld ν auf M , so dass für jedes $p \in M$ der Vektor $\nu(p)$ ein Einheits-Normalenvektor auf M ist, und so dass gilt: Ist (v_1, \dots, v_{n-1}) eine bezüglich \mathfrak{A} positiv orientierte Basis von $T_p M$, so ist $(\nu(p), v_1, \dots, v_{n-1})$ eine bezüglich der Standardorientierung des \mathbb{R}^n positiv orientierte Basis von \mathbb{R}^n .

Für den Beweis der folgenden Aussagen verweisen wir auf [F, §20].

Bemerkungen 5.2.21.

1. Wenn eine Hyperfläche $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Orientierung \mathfrak{A} besitzt, so existiert ein positiv orientiertes Einheits-Normalenfeld.
2. Eine Orientierung einer Hyperfläche lässt sich umgekehrt durch ein Einheits-Normalenfeld ν charakterisieren.
3. Für ein Kompaktum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand ∂A sprechen wir von der *kanonischen Orientierung* des Randes ∂A , wenn die Orientierung durch das *äußere* Normalen-Einheitsvektorfeld gegeben ist.

Wir erinnern an das vektorielle (Hyper-)Flächenelement aus Definition 5.2.6: Dies ist ein n -Tupel von $(n-1)$ -Formen, $d\vec{S} := (dS_1, \dots, dS_n)^T$. Somit ist für ein stetiges Vektorfeld $f = (f_1, \dots, f_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Ausdruck $\langle f, d\vec{S} \rangle$ eine stetige $(n-1)$ -Form auf U .

Wir wollen die Integration von Differentialformen und von Funktionen in Beziehung setzen.

Satz 5.2.22.

Sei U offen im \mathbb{R}^n und $M \subseteq U$ eine Hyperfläche im \mathbb{R}^n , die durch ein Einheits-Normalenfeld $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ orientiert sei. Sei $f = (f_1, \dots, f_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf U . Dann gilt für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq M$

$$\int_K \langle f, d\vec{S} \rangle = \int_K \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x).$$

Symbolisch wird die Aussage auch in der Form $d\vec{S} = \nu dS$ geschrieben. Man beachte, dass auf der linken Seite eine $(n-1)$ -Form und auf der rechten Seite eine reellwertige Funktion integriert werden.

Beweis.

Wir betrachten nur den Spezialfall einer parametrisierten Fläche im \mathbb{R}^3 : Es sei U offen im \mathbb{R}^3 und $M \subseteq U$ eine Fläche im \mathbb{R}^3 , die mit nur einer Karte $\varphi: T \xrightarrow{\sim} M$ beschrieben wird, wobei T offen im \mathbb{R}^2 ist.

Es sei $f = (f_1, f_2, f_3): U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld und $K \subseteq M$ kompakt. Wir wollen zeigen:

$$\int_K \langle f, d\vec{S} \rangle = \int_K \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x).$$

Für $t \in T$ ist der Einheitsnormalenvektor im Punkt $\varphi(t) \in M$ gegeben durch das Vektorprodukt

$$\nu(\varphi(t)) = \frac{\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi}{\|\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi\|}$$

Wir rechnen dann

$$\begin{aligned} \int_K \langle f, d\vec{S} \rangle &= \int_K f_1 dx_2 \wedge dx_3 - \int_K f_2 dx_1 \wedge dx_3 + \int_K f_3 dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \int_{\varphi^{-1}(K)} (\varphi^* f_1 d\varphi_2 \wedge d\varphi_3 - \varphi^* f_2 d\varphi_1 \wedge d\varphi_3 + \varphi^* f_3 d\varphi_1 \wedge d\varphi_2) \\ &= \int_{\varphi^{-1}(K)} \left(\varphi^* f_1 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \varphi^* f_2 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \varphi^* f_3 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} \right) \right) dt_1 \wedge dt_2 \\ &= \int_{\varphi^{-1}(K)} \left\langle \varphi^* f, \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_2} \right\rangle dt_1 \wedge dt_2. \end{aligned}$$

Wir haben dabei erst die Definition des vektoriiellen Flächenelements $d\vec{S}$ eingesetzt, dann die Definition 5.2.19 des Integrals und die Definition 5.2.12 des Rücktransports und dann die Kettenregel, gefolgt von der Definition des Kreuzprodukts.

Unser Zwischenergebnis ist das in Definition 5.2.15 definierte Integral einer 2-Form über die Teilmenge $\varphi^{-1}(K) \subseteq \mathbb{R}^2$. Dieses Integral ist:

$$\begin{aligned} \int_K \langle f, d\vec{S} \rangle &= \int_{\varphi^{-1}(K)} \langle \varphi^* f(t), \partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi \rangle dt_1 dt_2 \\ &= \int_{\varphi^{-1}(K)} \langle f(\varphi(t)), \nu(\varphi(t)) \rangle \underbrace{\|\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi\|}_{dS(x)} dt_1 dt_2 \\ &= \int_K \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x). \end{aligned}$$

□

Definition 5.2.23

1. Sei $H_k \subseteq \mathbb{R}^k$ der Halbraum

$$\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \leq 0\}.$$

Wir versehen den Rand ∂H_k mit der durch das äußere Normalen-Einheitsvektorfeld ν mit $\nu(x) = e_1$ für $x \in \partial H_k$ gegebenen Orientierung.

2. Sei M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n und $A \subseteq M$. Ein Punkt $p \in M$ heißt Randpunkt der Teilmenge A relativ zur Untermannigfaltigkeit M , falls in jeder Umgebung von p sowohl Elemente von A als auch von $M \setminus A$ liegen. Die Menge aller dieser Randpunkte bezeichnen wir mit $\partial_M A$. Dies ist eine Teilmenge der Untermannigfaltigkeit M .
3. Wir sagen, ein Kompaktum $A \subseteq M$ habe glatten Rand $\partial_M A$, wenn gilt: Es existiert für jedes $p \in \partial_M A$ eine Karte $\varphi: T \xrightarrow{\sim} V$ von M mit $p \in V$, so dass $\varphi(H_k \cap T) = A \cap V$ und $\varphi(\partial H_k \cap T) = \partial_M A \cap V$ gilt. Eine solche Karte von M nennen wir randadaptiert.

Man zeigt:

Betrachtung 5.2.24.

1. Ist M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n und $A \subseteq M$ kompakt mit glattem Rand, so ist $\partial_M A$ eine kompakte $(k - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .
2. Ist die Untermannigfaltigkeit M zusätzlich orientiert, so erhält man eine *induzierte Orientierung* auf dem Rand $\partial_M A$: Man wähle nur randadaptierte Karten, die positiv orientiert sind, und schränke diese auf den Rand $\partial_M A$ ein.
3. Im Fall $k = n$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, A wie in 2, ist die auf $\partial_M A$ durch die kanonische Orientierung von M induzierte Orientierung diejenige, die durch das äußere Normalen-Einheitsvektorfeld gegeben ist.

Der folgende Satz ist schon ein Spezialfall des Satzes von Stokes:

Lemma 5.2.25.

Sei ω eine stetig differenzierbare $(k - 1)$ -Form im \mathbb{R}^k mit $k \geq 2$, mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_{H_k} d\omega = \int_{\partial H_k} \omega.$$

Beweis.

- Wir schreiben die $(k - 1)$ -Form ω als

$$\omega = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_k$$

mit C^1 -Funktionen f_1, \dots, f_k . In der von der randadaptierten Karte induzierten Karte $\beta: \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \partial H_k$ des Randes mit $(t_1, \dots, t_{k-1}) \mapsto (0, t_1, \dots, t_{k-1})$ gilt

$$\beta^* \omega = f_1(0, t_1, \dots, t_{k-1}) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1};$$

also folgt für das Randintegral

$$\int_{\partial H_k} \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, t_1, \dots, t_{k-1}) d^{k-1}t.$$

- Wir berechnen das Integral der k -Form

$$d\omega = \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

über den Halbraum $H_k = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-1}$. Für jedes feste $(x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1}$ folgt, da die Komponentenfunktion f_1 kompakten Träger hat

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 = f_1(0, x_2, \dots, x_k).$$

Es folgt durch weitere Integration:

$$\int_{H_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k.$$

Für $2 \leq j \leq k$ gilt

$$\int_{H_k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = \pm \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_j \right) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_k.$$

Für festes $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k)$ hat die Funktion $x_j \mapsto f_j(x_1, \dots, x_k)$ kompakten Träger. Also verschwindet das Integral in der Klammer. Insgesamt ergibt sich

$$\int_{H_k} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k = \int_{\partial H_k} \omega.$$

□

Wir können nun den Stokesschen Integralsatz in seiner vollständigen Form formulieren:

Theorem 5.2.26 (Stokesscher Integralsatz im \mathbb{R}^n).

Sei U offen im \mathbb{R}^n . Sei $M \subseteq U$ eine orientierte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit (mit $k \geq 2$) und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$ -Form in U . Dann gilt für jedes Kompaktum $A \subseteq M$ mit glattem Rand $\partial_M A$, wobei wir $\partial_M A$ mit der von M induzierten Orientierung versehen:

$$\int_A d\omega = \int_{\partial_M A} \omega.$$

Der Stokessche Integralsatz gilt auch für abstrakte Mannigfaltigkeiten.

Beweis.

- Wie im Beweis des Gaußschen Integralsatzes führen wir zu einem randadaptierten Atlas ein feine beliebig oft differenzierbare Teilung der Eins $\alpha_{p,\epsilon}$ ein und zerlegen die $(k-1)$ -Form ω :

$$\omega = \sum_p \alpha_{p,\epsilon} \omega.$$

Es genügt wieder, den Stokesschen Integralsatz für die einzelnen Summanden zu beweisen.

- Wir nehmen daher an, dass $M \cap \text{supp}(\omega)$ kompakt und ganz in einer Karte $\varphi: \Omega \rightarrow V \subseteq M$ aus dem randadaptierten Atlas enthalten ist. Die Differentialform $\varphi^*\omega$ auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ kann daher durch Null zu einer auf ganz \mathbb{R}^k stetig differenzierbaren Differentialform $\tilde{\omega}$ mit kompaktem Träger fortgesetzt werden. Es gilt

$$(*) \quad \int_A d\omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{H_k \cap \Omega} \varphi^*(d\omega) \stackrel{5.2.13.3}{=} \int_{H_k \cap \Omega} d\varphi^*\omega = \int_{H_k} d\tilde{\omega}.$$

- Betrachte die Einbettung

$$\begin{aligned} \beta: \mathbb{R}^{k-1} &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (u_1, \dots, u_{k-1}) &\mapsto (0, u_1, \dots, u_{k-1}) \end{aligned}$$

und

$$\Omega_0 := \beta^{-1}(\partial H_k \cap \Omega) \subseteq \mathbb{R}^{k-1}.$$

Dann ist

$$\psi := \varphi \circ \beta: \Omega_0 \rightarrow V_0 := \partial_M A \cap V$$

eine Karte des Randes $\partial_M A$. Dann ist

$$(**) \quad \int_{\partial_M A} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_0} \psi^*\omega = \int_{\Omega_0} \beta^*\varphi^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \beta^*\tilde{\omega} = \int_{\partial H_k} \tilde{\omega}.$$

Die Gleichheit von (*) und (**) und somit die Behauptung folgt nun aus Lemma 5.2.25. □

Korollar 5.2.27.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$ -Form auf U . Dann gilt für jede orientierte, kompakte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subseteq U$

$$\int_M d\omega = 0.$$

Beweis.

Da M kompakt ist, wähle im Stokesschen Satz 5.2.26 $A = M$. Da die Mannigfaltigkeit M keinen Rand hat, ist $\partial M = \emptyset$. □

Wir leiten aus dem Stokesschen Satz 5.2.26 zwei klassische Integralsätze ab.

Bemerkungen 5.2.28.

1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Betrachte eine parametrisierte Fläche $M \subseteq U$ im \mathbb{R}^3 . Ferner sei ein differenzierbares Vektorfeld $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben, das mit dem vektoriellen Linienelement $d\vec{s}$ aus Definition 5.2.6 eine 1-Form $\omega := \langle F, d\vec{s} \rangle$ liefert.

Sei $A \subseteq M$ ein Kompaktum in der Fläche M mit glattem Randweg $\varphi: [a, b] \rightarrow M$, der positiv umlaufend sein soll. Dann erhalten wir mit $d\omega = \langle \text{rot} F, d\vec{S} \rangle$ aus Beispiel 5.2.7.4

$$\begin{aligned} \int_A \langle \text{rot} F(x), \nu(x) \rangle dS(x) &\stackrel{5.2.22}{=} \int_A \langle \text{rot} F, d\vec{S} \rangle = \int_A d\omega \\ &\stackrel{5.2.26}{=} \int_{\partial_M A} \omega = \int_{\partial_M A} \langle F, d\vec{s} \rangle \\ &= \int_{[a,b]} \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Dies ist der klassische Satz von Stokes.

2. Der klassische Satz von Gauß ist der Spezialfall $k = n$ des Satzes von Stokes 5.2.26. Mit der $(n - 1)$ -Form $\omega = \langle F, d\vec{S} \rangle$ ist hierbei wie in Beispiel 5.2.7.3

$$d\omega = (\operatorname{div} F) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Wir finden

$$\begin{aligned} \int_A \operatorname{div} F d^n x &= \int_A d\omega \stackrel{5.2.26}{=} \int_{\partial_M A} \omega = \int_{\partial_M A} \langle F, d\vec{S} \rangle \\ &\stackrel{5.2.22}{=} \int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle dS(x). \end{aligned}$$

Literatur

- [E] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, American Mathematical Society, Providence R.I., 1998
- [F] Otto Forster, *Analysis 3*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011
- [H] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis 1, 2*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2006
- [J] Lothar Jantscher, *Distributionen*, de Gruyter, Berlin, 1971
- [K] Konrad Königsberger, *Analysis 2*, Springer, Berlin/Heidelberg, 2004