Theorie und Numerik von Differentialgleichungen
mit
MATLAB und SIMULINK

K. Taubert
Universität Hamburg
SS08

Variationsungleichungen

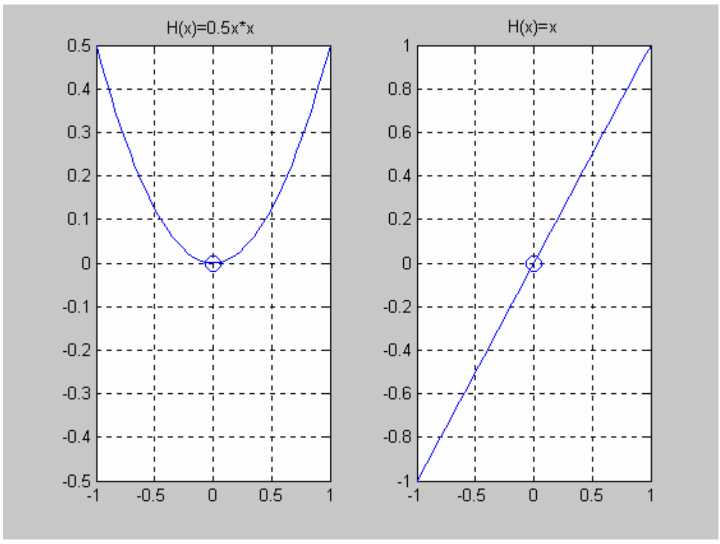
10 VARIATIONSUNGLEICHUNGEN. THEORIE UND NUMERIK.

§ 10.1 Einführung

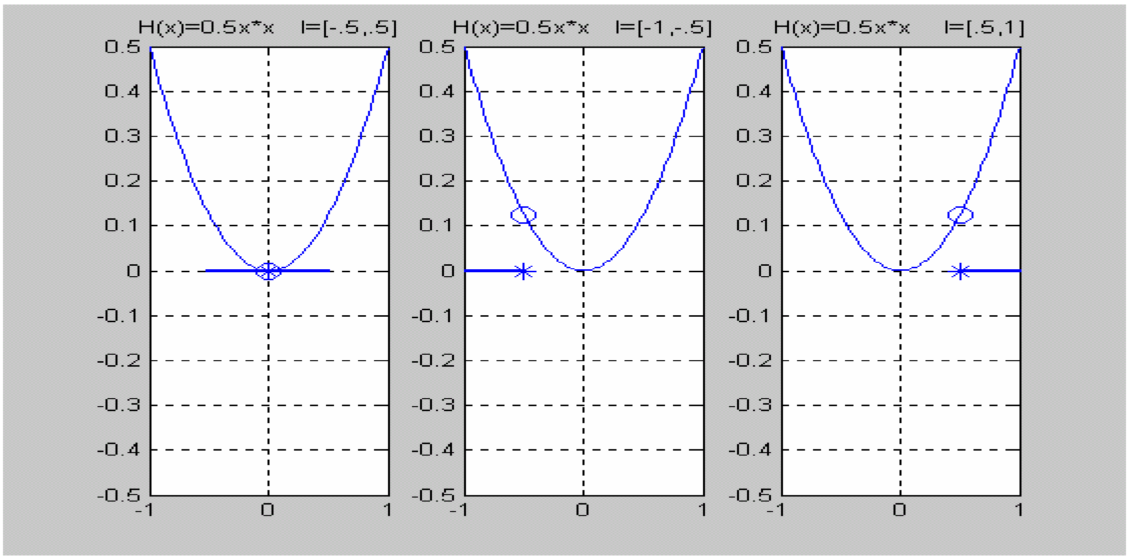
Bei den Variationsungleichungen handelt es sich um Minimierungsaufgaben mit Nebenbedingungen. Der elementare theoretische Hintergrund soll zunächst an einer ganz einfachen Aufgabe erläutert werden.
Das Minimum der Funktion $H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $H(x) = 0.5x^2$ wird an der Stelle x_0 mit

$$H'(x_0) = h(x_0) = 0$$

angenommen und mithin über die Ableitung h der Funktion H charakterisiert.



Diese Charakterisierung bleibt nicht mehr richtig, wenn das Minimum der Funktion H lediglich auf einer (konvexen und abgeschlossenen) Teilmenge I aus **R** gesucht wird.
Dennoch kann auch in diesem Fall der Punkt x_0, in dem das Minimum angenommen wird, leicht bestimmt werden. Dieses zeigt das folgende Beispiel:
Für verschiedene Intervalle $I = [a,b] \subset \mathbf{R}$ ($I = [-.5,.5], [-1,-.5]$ oder $[.5,1]$) können die zugehörigen Minimalwerte (0) von H und die zugehörigen Argumente $x_0 = *$ aus folgenden Bild entnommen werden.



Schnell überzeugt man sich davon, dass die zum jeweiligen Minimum (0) gehörenden Argumente x_0 = * durch die Bedingung (Variationsungleichung)

$$H'(x_0)(v-x_0) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad v \in I$$

bestimmt werden.
Obwohl diese Variationsungleichung durch einfache Inspektion bestimmt wurde, kann diese auch formal hergeleitet werden:
Es sei x_0 das Minimum der Funktion H auf $I = [a,b]$. Die Funktion $f_v : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ mit

$$f_v(t) = H(x_0+t(v-x_0)) \qquad v \in I$$

ist auf [0,1] stetig differenzierbar und es gilt

$$f_v'(t) = H'(x_0+t(v-x_0))(v-x_0) \quad \text{für alle} \quad v \in I$$

Da $f_v(t)$ als Funktion von t sein Minimum an der Stelle t = 0 annimmt, muss $f_v'(0) \geq 0$ für alle $v \in I$ sein, d.h.

$$H'(x_0)(v-x_0) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad v \in I$$

Damit wird das Minimum nicht mehr durch die Bedingung

$$H'(x_0) = 0$$

sondern durch die Variationsungleichung

$$H'(x_0)(v-x_0) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad v \in I$$

charakterisiert. Dieses hat weitgehende Konsequenzen und Anwendungen. Was bereits am folgenden Beispiel erkannt werden kann.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$L(y) := -(p(x)y')' + q(x)y = f(x)$$

mit geeigneten Randbedingungen.

Dabei seien $p(.) > 0$ und $q(.) \geq 0$ stetige Funktionen von [a,b] in **R**. Die Funktion $f(.)$ sei eine quadratisch integrierbare Funktion von [a,b] in **R**.

Multiplikation der Differentialgleichung mit Funktionen $v \in C_0^\infty(a,b)$ und Integration über das Intervall [a,b] führt auf die Bilinearform

$$a(u,v) = \int_a^b (pu'v' + quv)dx$$

und die Linearform

$$F(v) = \int_a^b fvdx\ .$$

Mit geeigneten Hilberträumen V

$$C_0^\infty(a,b) \subset V \subset H^1(a,b)$$

führten (§9) diese Formen auf die Aufgabe

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } u \in V \text{ mit} \\ a(u,v) = F(v) \quad \forall\ v \in V. \end{cases}$$

und die dazu äquivalente Minimierungsaufgabe

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } u \in V \text{ mit} \\ E(u) \leq E(v) \quad \forall\ v \in V. \end{cases}$$

mit dem „Energiefunktional“ $E : V \to \mathbf{R}$

$$E(v) = (1/2)a(v,v) - F(v).$$

Die entstandene Minimierungsaufgabe kann nun eingeschränkt werden. Es kann vernünftig sein, ein Minimum nicht auf ganz V sondern „nur“ auf einer abgeschlossenen und konvexen Teilmenge M von V zu suchen.

Die folgenden Zeilen zeigen, dass solche Minimalpunkte auch zu einer Variationsungleichung führen.

Es sei also M eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge $M \subset V$ und $u \in M$ mit

$$E(u) \leq E(v) \quad \text{für alle } v \in M \subset V$$

Für ein beliebiges $v \in M$ sei $f_v : [0,1] \to \mathbf{R}$

$$f_v(t) = (1/2)a(u+t(v-u),u+t(v-u)) - F(u+t(v-u)) =$$

$$= (1/2)a(u,u) + (1/2)ta(u,v-u) + (1/2)ta(v-u,u) + (1/2)t^2a(v-u,v-u) - F(u) - tF(v-u).$$

Die Funktion $f_v : [0,1] \to \mathbf{R}$ ist wieder auf [0,1] stetig differenzierbar und es gilt

$$f_v'(t) = a(u,v-u) - F(v-u) + t\,a(v-u,v-u) \qquad \text{für alle} \quad v \in I$$

Als notwendige Bedingung für ein Minimalpunkt u ergibt sich also die Variationsungleichung

$$a(u,v-u) - F(v-u) \geq 0 \qquad \text{für alle} \quad v \in M.$$

§ 10.2 Beispiele

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$-u'' = f \qquad \text{auf} \qquad \Omega = (0,1)$$

Ist M eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge aus $H^1(0,1)$, dann führt diese Aufgabe zur Variationsungleichung:

„Gesucht ist ein $u \in M$ mit

$$\int_0^1 u'(x)(v'(x) - u'(x))dx \geq \int_0^1 f(x)(v(x) - u(x))dx \qquad \forall \; v \in M \text{“}$$

Es sei jetzt $\Omega = (0,1)$ und

$$M = \{ v \in H^1(0,1) \;/\; v(0) \geq 0, \;\; v(1) \geq 0 \}.$$

Interessant ist nun, dass dieser Variationsungleichung wieder eine „klassische Randwertaufgabe“ zugeordnet werden kann. Aber: Welche ist diese „Randwertaufgabe“?

Es zeigt sich, dass die Variationsungleichung zu folgender „Randwertaufgabe“ führt:

$$-u'' = f \qquad \text{auf} \qquad \Omega = (0,1)$$

$$u(0) \geq 0, \;\; u(1) \geq 0, \;\; u'(0) \leq 0, \;\; u'(1) \geq 0$$
$$u(0)u'(0) = u(1)u'(1) = 0.$$

Die spezielle Wahl von M führt dazu, dass $0 \in M$ und mit u auch $2u \in M$ ist. Damit liefert die Variationsungleichung die beiden Relationen

$$\int_0^1 u'\,v'\,dx \geq \int_0^1 fv\,dx \qquad \text{für alle} \quad v \in M$$

$$\int_0^1 u'^2 dx = \int_0^1 fu\,dx\,.$$

Wir nehmen nun an, dass eine Funktion $u : [0,1] \to \mathbf{R}$ existiert welche die Variationsungleichung erfüllt, deren erste Ableitung absolut stetig und deren zweite Ableitung quadratisch integrierbar ist.

Es sei $v \in C_0^\infty(0,1)$, dann ist $v(0) = v(1) = 0$ und mit v liegt auch $-v$ in M. Daraus folgt

$$\int_o^1 u'v'dx = \int_0^1 fvdx\,.$$

Partielle Integration liefert

$$\int_o^1 (-u''-f)vdx = 0 \quad \text{für alle} \quad v \in C_0^\infty(0,1)$$

und damit

$$-u'' = f \quad \text{f.ü.} \quad \text{auf} \quad \Omega = (0,1).$$

Partielle Integration liefert für alle $v \in M$

$$\int_o^1 -u''vdx + [u'(1)v(1) - u'(0)v(0)] \geq \int_0^1 fvdx.$$

Daraus ergibt sich die Ungleichung

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) \geq 0 \qquad \text{für alle} \quad v \in M\,.$$

Durch ein v mit den Eigenschaften $v(1) = 1$ und $v(0) = 0$ (oder $v(1) = 0$ und $v(0) = 1$) ergibt sich

$$u'(1) \geq 0 \qquad (\text{ oder } -u'(0) \geq 0\,).$$

Aus

$$\int_o^1 u'^2 dx = \int_0^1 fudx$$

folgt

$$u'(1)u(1) - u'(0)u(0) = 0.$$

Wegen $u'(1) \geq 0$ folgt

$$0 \leq u'(1)u(1) = u'(0)u(0) \leq 0$$

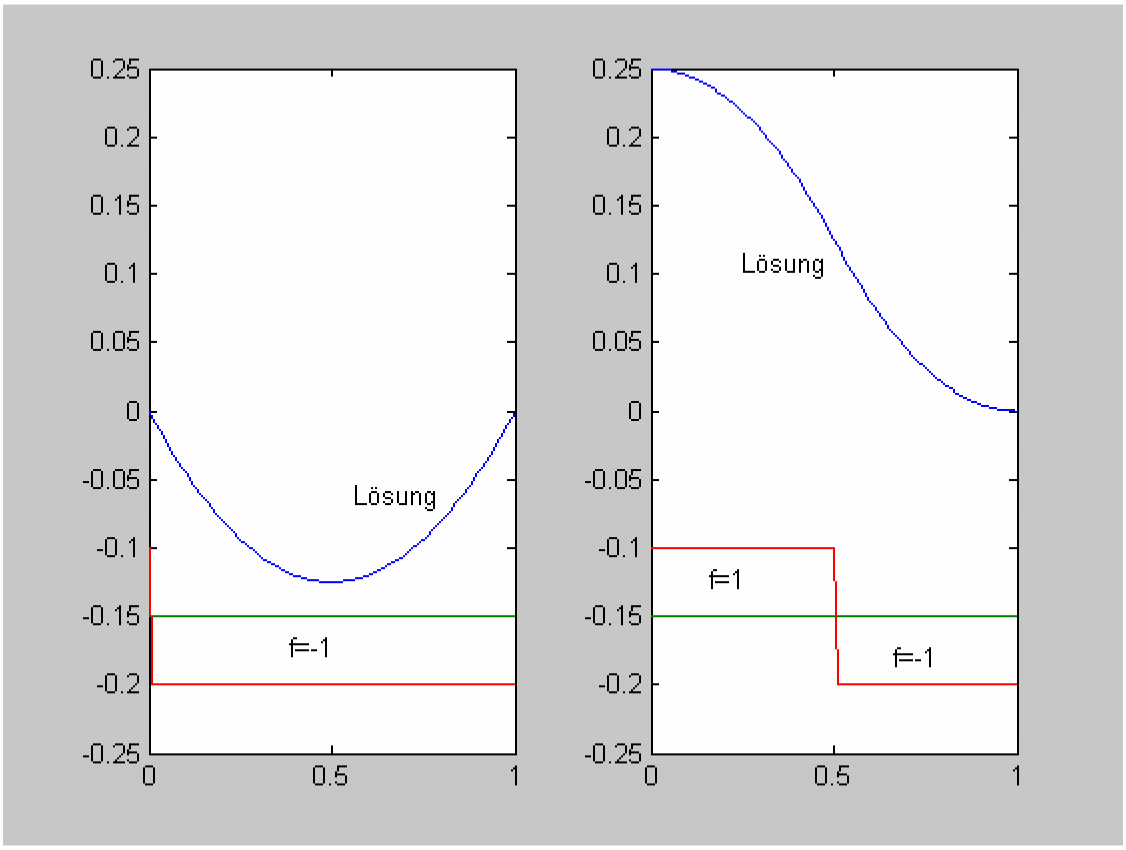
und damit die noch fehlenden Gleichungen

$$u'(1)u(1) = u'(0)u(0) = 0\,.$$

Die konkrete Wahl

$$f_0 = -1 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \qquad f_{1/2} = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1 & \text{für} \quad 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

und eifriges Rechnen führt zu folgenden Lösungen:



Es sei jetzt $\Omega = (0,2)$, $f = 6(x-1)$ und $M = M_a$

$$M_a = \{ v \in H^1(0,2) \ / \ v(0) = a, \quad v(2) = a, \quad v(x) \geq 0 \ \}$$

Die zugehörige Variationsungleichung hat wieder die Form

„Gesucht ist ein $u \in M_a$ mit

$$\int_0^1 u'(x)(v'(x) - u'(x))dx \ \geq \ \int_0^1 f(x)(v(x) - u(x))dx \qquad \forall \ \ v \in M_a \text{“}$$

und wir stellen uns erneut die Frage: Welche „klassischen Randwertaufgabe“ wird durch die zugehörige Variationsungleichung gelöst?

Wir nehmen nun wieder an, dass eine Funktion $u : [0,2] \to \mathbf{R}$ existiert welche die Variationsungleichung erfüllt, deren erste Ableitung absolut stetig und deren zweite Ableitung quadratisch integrierbar ist. Dann genügt diese Funktion der „Randwertaufgabe“

$$- u'' = f \qquad \text{auf} \qquad \Omega = (0,2)$$
$$u(0) = u(2) = a$$

mit den zusätzlichen Bedingungen:
Ist Ω_0 die Menge der $x \in \Omega$ mit $u(x) = 0$ und Ω_1 die Menge der $x \in \Omega$ mit $u(x) > 0$, dann gilt für (die unbekannten) Punkte x_i aus $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1$

$$u(x_i) = u'(x_i) = 0.$$

Es sei $\varphi \in C_0^\infty(0,2)$ eine Funktion deren Träger M in Ω_1 liegt. M ist kompakt und deshalb $u(x) \geq \eta > 0$.
Es sei jetzt $v = u \pm \varepsilon\varphi$. Für hinreichend kleine ε ist dann $v(x) \geq 0$ auf M. Aus der Variationsungleichung folgt dann

$$\pm\varepsilon\int_{\Omega_1} u'(x)\varphi'(x)dx \;\geq\; \pm\varepsilon\int_{\Omega_1} f(x)\varphi(x)dx \qquad \forall\ \varphi.$$

Partielle Integration liefert

$$\pm\varepsilon\int_{\Omega_1} [-u''-f]\varphi dx \;\geq\; 0 \qquad \forall\ \varphi.$$

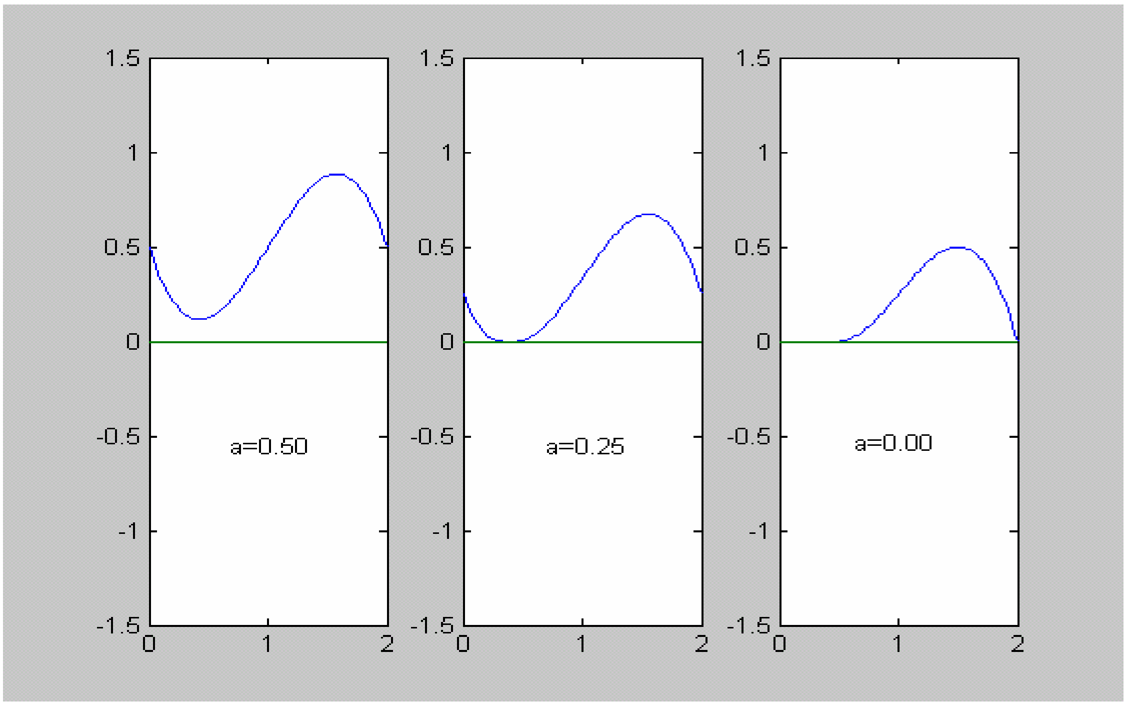
D.h. es muss gelten

$$-u'' - f = 0 \qquad \text{für} \qquad x \in \Omega_1.$$

Da wir angenommen haben, dass die Funktion aus u mindestens einmal stetig differenzierbar ist, muss an den Übergängen x_i die Bedingung

$$u(x_i) = u'(x_i) = 0.$$

erfüllt sein.
Erneut führt eifriges Rechnen zu den folgenden Lösungen (in Abhängigkeit von a)



§ 10.3 Etwas Theorie

Wir benötigen einige theoretischen Hilfsmittel:

Es sei M eine abgeschlossene konvexe Teilmenge eines Hilbertraumes über R, dann gibt es zu jedem $x \in H$ ein eindeutig bestimmtes $y \in M$ mit

$$\| x - y \| = \inf_{\eta \in M} \| x - \eta \| .$$

Dieser Punkt heißt Projektion von x auf M

$$y := P_M x .$$

Die Projektion von y auf M kann wie folgt charakterisiert werden:

Satz 10.1
Es sei M eine abgeschlossene Teilmenge eines Hilbertraumes über **R**. Dann ist $y = P_M x$ genau dann, wenn

$$(y,v-y) \geq (x,v-y) \quad \text{für alle } v \in M.$$

Beweis :

Es sei $x \in H$ und $y = P_M x$. Da M konvex ist, folgt

$$(1-t)y + tv = y + t(v - y) \in M \quad \text{für alle } v \in M \text{ und alle } t \text{ mit } 0 \leq t \leq 1.$$

Die Funktion

$$f(t) = \| x-y - t(v-y) \|^2.$$

ist stetig differenzierbar auf [0,1] und die Ableitung an der Stelle t = 0 ist

$$-2(x-y , v-y).$$

Wegen der Minimalität von y muss die Ableitung an der Stelle $t = 0$ aber nichtnegativ sein, d.h.

$$(y, v-y) \geq (x, v-y) \quad \text{für alle } v \in M.$$

Hat umgekehrt $y \in M$ die Eigenschaft $(y, v-y) \geq (x, v-y)$ für alle $v \in M$. Dann gilt

$$0 \leq (y-x ,v-y) = (y-x, (v-x)+(x-y)) = - \|x-y\|^2 + (y-x,v-x).$$

Damit ist aber für alle $v \in M$ auch

$$\|x-y\|^2 \leq \|y-x\| \, \|v-y\| \quad \text{oder} \quad \|x-y\| \leq \|v-x\|.$$

Korollar
Sei M eine konvexe abgeschlossene Teilmenge eines Hilbertraumes H, dann ist der Operator P_M nichtexpansiv, d.h.

$$\| P_M x_1 - P_M x_2 \| \leq \| x_1 - x_2 \| \quad \text{für alle } x_1,x_2 \in H.$$

Beweis:
Es sei $y_i = P_M x_i$, $i=1,2$. Dann gilt

$$(y_1,v-y_1) \geq (x_1,v-y_1) \qquad \text{für alle } v \in M$$
$$(y_2,v-y_2) \geq (x_2,v-y_2) \qquad \text{für alle } v \in M.$$

Wähle $v = y_2$ in der ersten und $v = y_1$ in der zweiten Ungleichung. Addition liefert dann

$$-\|y_1-y_2\|^2 \geq (x_2-x_1,y_1-y_2)$$

oder

$$\|y_1-y_2\|^2 \leq \|x_1-x_2\| \, \|y_1-y_2\|.$$

§ 10.4 Numerische Methoden

Es sei A eine symmetrische und positiv definite n*n Matrix und f ein Vektor aus dem $\mathbf{R}^n$. Bekanntlich sind dann die beiden folgenden Aufgaben äquivalent:

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } u \in R^n \text{ mit} \\ \qquad Au = f \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist } u \in R^n \text{ mit} \\ J(u) \leq J(x) \quad \text{für alle } x \in R^n \end{cases}$$

Dabei sei $J(u) = (1/2)(Au,u) - (f,u)$ und $(.,.)$ das gewöhnliche Skalarprodukt im $\mathbf{R}^n$.

Es sei jetzt M eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge aus dem $\mathbf{R}^n$ und die folgende Minimierungsaufgabe

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist } u \in M \text{ mit} \\ J(u) \leq J(x) \quad \text{für alle } x \in M \end{cases}$$

gegeben. Dieser gesuchte Minimalpunkt existiert und kann wie folgt charakterisiert werden:

Satz 10.2
Ist $u \in M$ eine Lösung von

$$J(u) \leq J(v) \qquad \text{für alle } v \in M$$

Dann erfüllt u die „Variationsungleichung“

$$(Au,v-u) \geq (f,v-u) \qquad \text{für alle } v \in M$$

und umgekehrt.

Beweis
Auf den Beweis der ersten Richtung verzichten wir. u sei also eine Lösung der Aufgabe

$$(Au,v-u) \geq (f,v-u) \qquad \text{für alle } v \in M.$$

Aus

$$J(v) = J(u+(v-u)) = (1/2)(Au,u) - (f,u) + (Au,v-u)-(f,v-u) + (1/2)(A(v-u),v-u)$$

folgt dann die Behauptung.

Bemerkenswerter Weise kann die Aufgabe

„Gesucht ist ein $u \in M$ mit $(Au-f,v-u) \geq 0$ für alle $v \in M$ “

in eine Fixpunktaufgabe überführt werden.

Die Fixpunktaufgabe ergibt sich aus der folgenden Folge von äquivalenten Relationen:

$$(Au-f,v-u) \geq 0 \quad \text{für alle } v \in M$$

$$\chi$$

$$(-p(Au-f),v-u) \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M \text{ und } p>0$$

$$\chi$$

$$(u-p(Au-f)-u,v-u) \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M$$

$$\chi$$

„Gesucht ist ein $u \in M$ mit $\| (u-p(Au-f)-u) \| \leq \| (u-p(Au-f)-v) \|$ für alle $v \in M$ “

$$\chi$$

$$F(u) .= P_M(u-p(Au-f)) = u$$

P_M bildet nach Definition die konvexe Menge M in sich ab. Außerdem ist die Abbildung

$$F: M \rightarrow M$$

für hinreichend kleine p eine kontrahierende Abbildung:

Es sei

$$F(v_1) = P_M v_1-p(Av_1-f))$$
$$F(v_2) = P_M(v_2-p(Av_2-f)).$$

Da P_M nichtexpansiv ist, folgt

$$\| F(v_1) - F(v_2) \|^2 \leq \| v_1 - v_2 - p(A(v_1-v_2)) \|^2.$$

Ist $(Ax,x) \geq a(x,x)$ $(a > 0)$ dann ist F für alle $p < 2a/\|A\|^2$ kontrahierend und der Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen liefert auch die Existenz und Eindeutigkeit von y. Außerdem liefert der Fixpunktsatz auch eine konstruktive Möglichkeit zur Ermittlung des Fixpunktes. Die Erfahrung zeigt allerdings, dass hier ein außerordentlich träges Verfahren vorliegt.

Es gehört zu den neueren Entwicklungen im Bereich der Variationsungleichungen diese Aufgaben mit einem verallgemeinerten Newton Verfahren zu lösen.

Man betrachtet dazu die Funktion

$$H: M \rightarrow M$$

mit

$$H(v) = P_M(v-(Av-f)) - v$$

und sucht eine Nullstelle $H(v) = 0$ dieses Problems.

Formal hat das Newton Verfahren dann die Form

$$((DP_M)_w*(E-A) - E)z = -H(v_n) \qquad w = v_n-(Av_n-f)$$

$$v_{n+1} = v_n + z.$$

Leider ist die Projektion P_M i.a. keine differenzierbare Abbildung. D.h. der Ausdruck DP_M ist an der Stelle w i.a. nicht definiert. Man wird die sogenannte Clark'sche Ableitung wählen und für $(DP_M)_w$ eine Auswahl aus dieser mengenwertigen „Ableitung“ treffen. In der Praxis kann dieses sehr einfach sein:

Wir betrachten die einfache Aufgabe

$$-u'' = -1, \quad u(0) = u(2) = 0, \quad u \geq -0.25$$

Es sei h eine vorgegebene Schrittweite $h = 1/N$, $N \in \mathbf{N}$, und $x_i = ih$ die zugehörigen Gitterpunkte aus [0,2] mit i = 0,1,2, … ,N.

Eine kanonische Diskretisierung der Differentialgleichung führt auf das Gleichungssystem $Av = f$ mit

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ . \\ . \\ . \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist dann das Gleichungssystem $Av = f$ unter der Nebenbedingungun $v_i \geq -.25$ d.h.

$$P_M(v-(Av-f)) - v = 0.$$

Der Komponenten des Projektionsoperators $(P_Mv)_i$ haben die Gestalt

$$(P_Mv)_i = \begin{cases} v_i & \text{falls} \quad v_i > -.25 \\ -.25 & \text{falls} \quad v_i \leq -.25 \end{cases}$$

Damit kann $(DP_M)_w$ als Diagonalmatrix mit den Einträgen $a_{ii} = (\mathrm{sign}(w_i+0.25)+1)/2$ gewählt werden.

Das folgende MATLAB-Programm löst die Aufgabe mit dem Newton Verfahren und liefert ein Ergebnis welches von der exakten Lösung nicht zu unterscheiden ist:

```
function z = newtondata(u,psi,f,N)
%Liefert die Daten Dfu und fu für die Newtoniteration
%Dfu(u1-u)=-fu  bei vorgegebenem u
%Die Aufgabe ist -u"= f, u(0) =u(2) = 0 u>=psi
%N gibt die Anzahl der Knoten in [0,2] an
```

```
h = 2/(N-1);
A = 2*eye(N-2);
if N>3
    B =-diag(linspace(1,1,N-3),1)-diag(linspace(1,1,N-3),-1);
    A = (1/h^2)*(A+B);
end
H1 = u'-A*u'+f';
a = (sign(H1-psi')+1)/2;
DPK = diag(a');
Dfu = DPK*(eye(N-2)-A)-eye(N-2);
H2 = u'-A*u'+f';
PKH2 = (H2'>=psi).*(H2')+(H2'<psi).*psi;
fu = PKH2'-u';
z = [Dfu,fu];
```

```
N=80
psi= linspace(-.25,-.25,N-2);
u0 = linspace(-1,-1,N-2);
f  = linspace(-1,-1,N-2);
v  = u0;
for i=1:160
    z = newtondata(v,psi,f,N);
    DFu = z(:,1:N-2)
    fu = z(:,N-1);
    y=-DFu\fu;
    vv = [0 v 0];
    v= y'+v;
end
x = (0:2/(N-1):2)
w = [0 v 0]
plot(x,w,x,vv)
```