

**Theorie und Numerik von Differentialgleichungen
mit
MATLAB und SIMULINK**

**K. Taubert
Universität Hamburg
SS08**

Variationsgleichungen und Variationsaufgaben

9 GEWÖHNLICHE UND PARTIELLE RANDWERTAUFGABEN. SCHWACHE FORMULIERUNGEN. VARIATIONS-AUFGABEN UND VARIATIONSGLEICHUNGEN.

§ 9.1 Einführung

Wir betrachten erneut die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-(p(x)y')' + q(x)y = r(x) \quad x \in (a,b)$$

mit den homogenen Randbedingungen (Dirichlet-Aufgabe)

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0.$$

Dabei sei (zunächst) $p(\cdot) > 0$ eine stetig differenzierbare Funktion von $[a,b]$ in \mathbf{R} . Die Funktionen $r(\cdot)$ und $q(\cdot)$ seien stetige Funktionen von $[a,b]$ in \mathbf{R} und $q(\cdot) \geq 0$.

Lösungen solcher Aufgaben sind Funktionen $y(\cdot) \in C^2[a,b]$, welche punktweise sowohl der Differentialgleichung als auch den Randbedingungen genügen

Entscheidend in diesem Kapitel ist nun, dass diese Randwertaufgaben auch anders (schwach) formuliert werden können. Diese neue Formulierung beinhaltet nicht nur die alte Aufgabenstellung sondern führt sogar dazu, dass die Bedingungen an $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ und $r(\cdot)$ abgeschwächt werden können. Vom physikalischen Standpunkt her, muss sogar gesagt werden, dass die ursprüngliche Formulierung häufig zu einschränkend ist.

Es sei $V = H_0^1[a,b] \subset H^1[a,b]$ der Raum der absolut stetigen Funktionen mit $v(a)=v(b) = 0$, deren Ableitungen quadratisch integrierbar sind.

Mit der Bilinearform $a : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$

$$a(u,v) = \int_a^b (pu'v' + quv) dx$$

und der Linearform $F : V \rightarrow \mathbf{R}$

$$F(v) = \int_a^b rv dx$$

kann die Dirichlet-Aufgabe in die folgenden zwei äquivalenten Aufgaben umgeschrieben werden:

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } u \in V \text{ mit} \\ a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (\text{Variationsgleichung})$$

und

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } u \in V \text{ mit} \\ E(u) \leq E(v) \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (\text{Variationsaufgabe})$$

Dabei ist $E : V \rightarrow \mathbf{R}$ das „Energiefunktional“

$$E(v) = (1/2)a(v, v) - F(v).$$

Bemerkung:

In der klassischen Literatur findet man häufig die folgende ausgeschriebene Form der Variationsaufgabe:

„Gesucht ist ein $\varphi \in V$ mit

$$J[\varphi] = \text{Min!}$$

und

$$J[\varphi] = \int_a^b (p\varphi'^2 + q\varphi^2 - 2r\varphi)dx \text{ „}.$$

Betrachtet man die „schwachen“ Aufgaben jetzt einmal unabhängig von der ursprünglichen Randwertaufgabe, dann fällt folgendes auf:

- Bei den „schwachen“ Formulierungen kann auf die stetige Differenzierbarkeit von $p(\cdot) > 0$ verzichtet werden. Die Funktionen $q(\cdot) \geq 0$ und $r(\cdot)$ brauchen außerdem nur quadratisch integrierbar zu sein. Die ursprüngliche Aufgabenstellung ist damit verallgemeinert worden.
- Die ursprüngliche Aufgabe wird durch die variationelle Formulierung und den Minimierungsaspekt völlig anders interpretiert.

Die „schwachen“ Formulierungen führen aber auch zu völlig anderen Ansätzen zur Lösung der ursprünglichen Aufgabe:

Für einen endlich dimensionalen Teilraum V_h von V können z.B. die folgenden Aufgaben betrachtet werden

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } u \in V_h \text{ mit} \\ a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \quad (\text{Galerkin-Verfahren})$$

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } u \in V_h \text{ mit} \\ E(u) \leq E(v) \quad \forall v \in V_h. \end{cases} \quad (\text{Ritz-Verfahren})$$

oder entsprechend ausgeschrieben

$$\text{„Gesucht ist ein } \varphi \in V_h \text{ mit } J[\varphi] = \text{Min! und } J[\varphi] = \int_a^b (p\varphi'^2 + q\varphi^2 - 2r\varphi)dx \text{ „}.$$

Bemerkung

Diese Interpretation und die damit verbundene Möglichkeit zur approximativen Lösung der Dirichlet-Aufgabe ist nicht auf diese Klasse von Aufgaben beschränkt. Weitere Fälle aus dem Bereich der gewöhnlichen Differentialgleichungen werden im Abschnitt 9.5 betrachtet. Besonders Aussagekräftig und wirksam wird diese Methode bei den partiellen Differentialgleichungen (Finite Elemente).

§ 9.2 Abstrakte lineare Variationsprobleme

Es sei V ein Vektorraum mit einem inneren Produkt (\cdot, \cdot) und $\|\cdot\|$ die durch $(\cdot, \cdot)^{1/2}$ gegebene Norm.

Es seien außerdem $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ und $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Abbildungen mit den folgenden Eigenschaften:

- a ist bilinear, d.h. eine lineare Abbildung in jedem Argument;
- a ist beschränkt, d.h. es existiert ein M mit $a(u, v) \leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V$;
- a ist symmetrisch, d.h. $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$;
- a ist koerziv, d.h. es existiert ein $\mu > 0$ mit $a(u, u) \geq \mu \|u\|^2 \quad \forall u \in V$.

- F ist linear;
- F ist beschränkt.

Wir betrachten nun die beiden Aufgaben

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } u \in V \text{ mit} \\ a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (\text{Variationsaufgabe})$$

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } u \in V \text{ mit} \\ E(u) \leq E(v) \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (\text{Variationsaufgabe})$$

Dabei sei $E : V \rightarrow \mathbb{R}$ das „Energiefunktional“

$$E(v) = (1/2)a(v, v) - F(v).$$

Der folgende Satz zeigt, dass die beiden Aufgaben äquivalent sind

Satz 9.1

Ist V ein Hilbertraum, dann sind die beiden Aufgaben äquivalent und haben eine eindeutige Lösung

Beweis

Durch $a(\cdot, \cdot)$ wird ein inneres Produkt auf V definiert. Die zugehörige Norm $\|\cdot\|_a = a(\cdot, \cdot)^{1/2}$ ist wegen

$$\mu \|v\|^2 \leq \|v\|_a^2 \leq M \|v\|^2 \quad \forall v \in V;$$

äquivalent zu $\|\cdot\|$. Damit ist V auch ein Hilbertraum bezüglich $\|\cdot\|_a$.

Der Darstellungssatz von Riesz liefert deshalb ein eindeutiges $v_F^a \in V$ mit

$$F(v) = a(v_F^a, v) \quad \forall v \in V.$$

Damit löst v_F^a in eindeutiger Weise die Aufgabe

$$a(u, v) = F(v) = a(v_F^a, v) \quad \forall v \in V.$$

Ist u eine Lösung von

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V,$$

dann gilt auch

$$a(u, u-v) = F(u-v) \quad \forall v \in V.$$

Die Ungleichung

$$a(u, u-v) \leq F(u-v) + (1/2)a(u-v, u-v) \quad \forall v \in V,$$

liefert

$$a(u, u) - a(u, v) \leq F(u) - F(v) + (1/2)a(u, u) - a(u, v) + (1/2)a(v, v) \quad \forall v \in V$$

und damit

$$E(u) \leq E(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass u die einzige Lösung der Minimierungsaufgabe ist:

Es sei also $E(u_1) = E(u_2) \leq E(v) \quad \forall v \in V$. Dann ist auch

$$E(u_1) \leq E((1/2)(u_1+u_2)) \quad \text{und} \quad E(u_2) \leq E((1/2)(u_1+u_2)).$$

Die Addition der beiden Ungleichungen ergibt

$$(1/2)a(u_1, u_1) + (1/2)a(u_2, u_2) \leq (1/4)(a(u_1, u_1)+a(u_2, u_2)+a(u_1, u_2)+a(u_2, u_1))$$

und damit den Widerspruch

$$(1/4)a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0.$$

Ist u eine Lösung der Minimierungsaufgabe, dann erfüllt diese (Differentiation) notwendig die Bedingung

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Bemerkung

Das ursprüngliche Dirichlet Problem und $V = H_0^1[a, b]$ führen zu den im Satz 9.1 geforderten Bedingungen. Unabhängig von der ursprünglichen Aufgabe sind die Bedingungen des Satzes aber auch dann erfüllt, wenn $p(\cdot) > 0$ lediglich stetig ist und die Funktionen $q(\cdot) \geq 0$ und $r(\cdot)$ quadratisch integrierbar sind.

§ 9.3 „Finite Elementmethode“ mit stückweise linearen Funktionen

Wir betrachten wiederum die Dirichlet Aufgabe

$$\begin{aligned} - (p(x)y')' + q(x)y &= r(x) & x \in (a, b) \\ y(a) &= 0 \quad \text{und} \quad y(b) = 0. \end{aligned}$$

in seiner schwachen Formulierung:

„Gesucht ist ein $u \in V = H_0^1[a, b]$ mit

$$a(u, v) = \int_a^b (pu'v' + quv)dx = \int_a^b rvdx = F(v) \quad \text{für alle } v \in V = H_0^1[a, b]$$

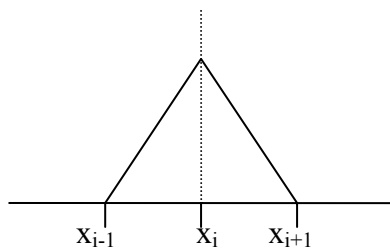
Dabei sei $p \in C[a, b]$ mit $p(x) > 0$ und $q, r \in L^2[a, b]$ mit $q \geq 0$.

Die „Finite Elementmethode“ approximiert die Lösung dieser Aufgaben über besondere endlichdimensionale Teilräume $V_h \subset V$. Exemplarisch soll als endlichdimensionaler Raum V_h der Raum der stückweise linearen Funktionen gewählt werden:

Das Intervall $[a, b]$ wird durch $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ in Teilintervalle $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ mit $j = 1, \dots, n$ zerlegt. Die x_j werden dabei als Knoten bezeichnet. Die Feinheit der Unterteilung wird durch $h = \max_{j=1, \dots, n} h_j$ gemessen, wobei $h_j = x_j - x_{j-1}$ die Länge des Teilintervalls I_j angibt. Der Teilraum V_h ist dann:

$$V_h = \{ v \in C[a, b] \mid v \text{ ist linear auf } I_j, j = 1, \dots, n \} \subset V.$$

Als Basis für V_h können die Funktionen $\varphi_j \in V_h$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ mit



$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

verwendet werden. Eine beliebige Funktion $v \in V_h$ mit $v(x_i) = v_i$ besitzt dann die Darstellung

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \varphi_i(x) \quad \text{mit } x \in [a, b].$$

Bemerkung

Typisch für die „Finite Elementmethode“ ist, dass die Basiselemente φ_j von V_h nur auf wenigen (zusammenhängenden) Teilintervallen I_j , den so genannten Elementen, von Null verschieden sind. Dies hat zur Folge, dass die meisten Produkte $\varphi_j \cdot \varphi_i$ identisch Null sind und damit eine später entstehende Systemmatrix zur Berechnung der Näherungslösung dünn besetzt ist.

Galerkin-Verfahren

Die Lösung der Aufgabe

„Gesucht ist ein $u_h \in V_h \subset H_0^1[a, b]$ mit

$$a(u_h, v) = \int_a^b (pu_h'v' + qu_hv)dx = \int_a^b rvdx = F(v) \quad \text{für alle } v \in V_h \subset H_0^1[a, b]$$

ist gegeben durch

$$a(u_h, \varphi_j) = (r, \varphi_j), \quad j=1, \dots, n-1.$$

Besitzt die gesuchte Lösung u_h die Darstellung

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \varphi_i(x),$$

dann ergeben sich die gesuchten ξ_i aus dem folgenden $(n-1) \times (n-1)$ linearen Gleichungssystem in $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})^T$

$$A \xi = b$$

mit den Lastvektor

$$b = ((r, \varphi_1), \dots, (r, \varphi_{n-1}))^T$$

und der Steifigkeitsmatrix

$$A = (a(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=1,2,\dots,n-1}.$$

Bemerkungen

Die Matrix A ist wegen der Koerzitivität von $a(\cdot, \cdot)$ und nach Konstruktion natürlich eine symmetrische positiv definite Matrix.

Aufgrund der Definition der Basisfunktionen φ_i erhält man

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} \neq 0 & \text{für } |i-j| \leq 1 \\ = 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h. die Steifigkeitsmatrix A besitzt Tridiagonalform.

Die Bezeichnungen von A und b gehen auf Anwendungen in der Strukturmechanik zurück, in denen die finite Elementmethode ihren Ursprung besitzt.

Ritz Verfahren

Gegeben sei

$$E(v) = (1/2) \int_a^b (pv'v' + qvv) dx - \int_a^b rvdx$$

und die Variationsaufgabe

„Gesucht ist ein $u_h \in V_h \subset H_0^1[a, b]$ mit

$$E(u_h) \leq E(v) \quad \text{für alle } v \in V_h \subset H_0^1[a, b] \text{“}.$$

Besitzt die gesuchte Lösung u_h die Darstellung

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \varphi_i(x),$$

dann ergeben sich die gesuchten ξ_i aus der Minimierung folgendes quadratischen Funktionals in $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})^T$

$$\frac{1}{2} \xi^T A \xi - b^T \xi = \text{Min!}$$

mit der Steifigkeitsmatrix und dem Lastvektor aus dem Galerkin Verfahren.

§ 9.4 Charakterisierung und Fehlerabschätzung

Wir betrachten wiederum die Dirichletaufgabe

$$-(p(x)y')' + q(x)y = r(x)$$

$$y(a) = y(b) = 0.$$

in seiner schwachen Formulierung. Es sei also $p \in C[a,b]$ mit $p(x) > 0$ und $q, r \in L^2[a,b]$ mit $q(x) \geq 0$.

Wir bemerken noch, dass durch die Bilinearform

$$a(u,v) = \int_a^b (p(x)u'v' + q(x)uv) dx \quad \text{für alle } u, v \in V = H_0^1[a, b]$$

ein inneres Produkt auf $H_0^1[a, b]$ gegeben und durch $\|v\|_a := \sqrt{a(v,v)}$ eine Norm in $H_0^1[a, b]$.

Satz 9.2

Es sei u die Lösung des Dirichlet Problems in seiner variationellen Formulierung und u_h eine mit dem Ritz- oder dem Galerkin Verfahren ermittelte Näherungslösung, dann gilt für alle $v \in V_h \subset H_0^1[a, b]$

1. $a(u-u_h, v) = 0$,
2. $\|u-u_h\|_a^2 + \|u_h\|_a^2 = \|u\|_a^2$,
3. $\|u-u_h\|_a \leq \|u-v\|_a$.

Beweis:

Es gilt $a(u,v) = F(v)$ und $a(u_h, v) = F(v)$ für alle $v \in V_h \subset V \subset H_0^1[a, b]$ und durch Differenzenbildung die erste Behauptung

$$a(u-u_h, v) = 0 \quad \text{für alle } v \in V_h.$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist } \|u-u_h\|_a^2 + \|u_h\|_a^2 &= a(u-u_h, u-u_h) + a(u_h, u_h) = a(u-u_h, u) - a(u-u_h, u_h) + a(u_h, u_h) \\ &= a(u, u) - a(u_h, u) + a(u_h, u_h) = a(u, u) = \|u\|_a^2. \end{aligned}$$

Es sei $w = u_h - v \in V_h$, dann gilt

$$\|u-u_h\|_a^2 = a(u-u_h, u-u_h) + a(u-u_h, w) = a(u-u_h, u-u_h+w) = a(u-u_h, u-v) \leq \|u-v\|_a \|u-u_h\|_a.$$

Bemerkungen

Die erste Behauptung des Satzes besagt, dass $u-u_h$ senkrecht auf V_h bezüglich des Skalarproduktes $a(\cdot, \cdot)$ steht.

Die letzte Behauptung besagt, dass u_h diejenige Funktion aus V_h ist, die der Lösung u bezüglich des durch $\|\cdot\|_a$ gemessenen Abstandes am nächsten liegt.

Die Abschätzung $\|u-u_h\|_a \leq \|u-v\|_a$ für alle $v \in V_h$ kann zur quantitativen Abschätzung des Fehlers der Näherungslösung u_h genutzt werden. Die Idee besteht darin, ein geeignetes $v \in V_h$ zu finden, bzgl. dessen man den Fehler berechnen kann. Wählt man den linearen Spline π_u , der die Funktionswerte von u in den Knoten x_i interpoliert, so kann der Fehler über den Interpolationsfehler $f_\pi(h)$ abgeschätzt werden.

Hilfssatz 9.1

Ist u zweimal stetig differenzierbar, so gilt für den, bzgl. der äquidistanten Knoten $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, interpolierenden linearen Spline π_u mit $h = (b-a)/n$

$$\max_{x \in [a,b]} |u(x) - \pi_u(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{x \in [a,b]} |u''(x)| \quad \text{und}$$
$$\max_{x \in [a,b]} |u'(x) - \pi'_u(x)| \leq h \max_{x \in [a,b]} |u''(x)|.$$

Satz 9.3

Für den Fehler der „Finite Elementlösung“ u_h mit linearen Elementen gilt für zweimal stetig differenzierbares u (und stetigem q)

$$\|u-u_h\|_a^2 = a(u-u_h, u-u_h) \leq Ch^2 \max_{x \in [a,b]} |u''(x)|^2.$$

Beweis:

Es ist

$$\begin{aligned} a(u-u_h, u-u_h) &\leq a(u-\pi_u, u-\pi_u) = \int_a^b (p(x)(u'(x) - \pi'_u(x))^2 + q(x)(u(x) - \pi_u(x))^2) dx \\ &\leq \max_{x \in [a,b]} |p(x)(u'(x) - \pi'_u(x))^2 + q(x)(u(x) - \pi_u(x))^2| |b-a| \\ &\leq (b-a) \left(\max_{x \in [a,b]} |p(x)| + \frac{h^2}{64} \max_{x \in [a,b]} |q(x)| \right) h^2 \max_{x \in [a,b]} |u''(x)|^2 \\ &\leq C h^2 \max_{x \in [a,b]} |u''(x)|^2. \end{aligned}$$

§ 9.5 Allgemeinere Fälle (Klassische Aufgabenstellung)

Im klassischen Buch von L. Collatz: „The Numerical Treatment of Differential Equations“ wird u.a. der folgende Satz angegeben:

Satz 9.4

Gegeben sei die lineare Randwertaufgabe zweiter Ordnung

$$-(p(x)y')' + q(x)y = r(x) \quad x \in (a,b)$$

mit den (homogenen) Randbedingungen

$$\begin{aligned} a_0 y(a) + a_1 y'(a) &= 0 & |a_0| + |a_1| &\neq 0 \\ b_0 y(b) + b_1 y'(b) &= 0 & |b_0| + |b_1| &\neq 0. \end{aligned}$$

Dabei sei $p(\cdot) > 0$ eine stetig differenzierbare Funktion von $[a,b]$ in \mathbb{R} . Die Funktionen $r(\cdot)$ und $q(\cdot)$ seien stetige Funktionen von $[a,b]$ in \mathbb{R} und $q \geq 0^*$. Die a_i und b_i seien reelle Zahlen.

Für $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$, sei $E : C^2[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$E[\varphi] = \int_a^b (p\varphi'^2 + q\varphi^2 - 2r\varphi) dx + R_a + R_b$$

mit

$$R_a = \frac{p(a)}{a_1} (-a_0 \varphi^2(a)) \quad \text{und} \quad R_b = \frac{p(b)}{b_1} (b_0 \varphi^2(b)).$$

Eine Lösung der Aufgabe

$$E[\varphi] = \text{Min!}$$

ist dann eine Lösung der entsprechenden Randwertaufgabe.

Ist $a_1 = 0$, dann gilt entsprechendes für $E[\varphi]$ ohne R_a und das Minimum ist in der Teilmenge der Funktionen aus $C^2[a,b]$ mit $\varphi(a) = 0$ zu suchen.

Ist $b_1 = 0$, dann gilt entsprechendes für $E[\varphi]$ ohne R_b und das Minimum ist in der Teilmenge der Funktionen aus $C^2[a,b]$ mit $\varphi(b) = 0$ zu suchen.

Bemerkung

Es muss erwähnt werden, dass dieser Satz keine Aussage darüber macht, ob eine Lösung der Randwertaufgabe das Funktional minimiert und ob ein Minimum des Funktionals existiert.

Merkregel

Treten in den Randbedingungen eine oder zwei Ableitungen nicht auf, dann muss die Klasse der Vergleichsfunktionen φ offenbar eingeschränkt werden. Diese Einschränkungen äußern sich darin, dass wesentliche Randbedingungen ($\varphi(a) = 0$ oder $\varphi(b) = 0$) erfüllt werden müssen und zum Integral noch weitere Terme (von den auftretenden Ableitungen abhängig) addiert werden müssen.

Es ist übersichtlicher die im Satz angegebene Funktionale, die zugehörigen Randwertaufgaben und die Funktionsklassen in einer Tabelle zusammen zu fassen:

a_1	b_1	Funktional $E[\varphi]$	Funktionsklasse V
0	0	$\frac{1}{2} \left(\int_a^b (p\varphi'^2 + q\varphi^2) dx \right) - \int_a^b r\varphi dx$	$C^2[a,b], \varphi(a) = \varphi(b) = 0$
0	$\neq 0$	$\frac{1}{2} \left(\int_a^b (p\varphi'^2 + q\varphi^2) dx + R_b \right) - \int_a^b r\varphi dx$	$C^2[a,b], \varphi(a) = 0$
$\neq 0$	0	$\frac{1}{2} \left(\int_a^b (p\varphi'^2 + q\varphi^2) dx + R_a \right) - \int_a^b r\varphi dx$	$C^2[a,b], \varphi(b) = 0$
$\neq 0$	$\neq 0$	$\frac{1}{2} \left(\int_a^b (p\varphi'^2 + q\varphi^2) dx + R_a + R_b \right) - \int_a^b r\varphi dx$	$C^2[a,b]$

* Liegen Neumann Bedingungen vor, dann muss $q > 0$ sein (Warum wohl?).

Nahe liegend ist nun die Frage, wie die Aufgaben aus dem Satz 9.4 im Kontext des Satzes 9.1 behandelt werden können.

§ 9.5 Der allgemeine Fall (Schwache Formulierung)

Ist a_1 und b_1 ungleich Null, dann führt das im Satz 9.4 angegebene Funktional $E[\varphi]$ zum bilinearen Funktional $a : C^2[a,b] * C^2[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$

$$a(u,v) = \int_a^b (pu'v' + quv)dx + \frac{p(a)}{a_1}(-a_0u(a)v(a)) + \frac{p(b)}{b_1}(b_0u(b)v(b)),$$

zum linearen Funktional $F : C^2[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$

$$F(v) = \int_a^b rv \, dx$$

und damit auch zum Energiefunktional

$$E(v) = (1/2)a(v,v) - F(v).$$

Offen ist dabei noch, ob oder unter welchen Umständen die weiter gehenden Forderungen an a und F aus dem Abschnitt 9.2 gewährleistet werden können bzw. welche die zugehörigen Hilberträume $(V, (\cdot, \cdot))$ sein könnten.

Die Funktionale und die im Satz 9.4 gemachten Aussagen über die zu wählenden Klassen von Funktionen V führen auf folgende Vektorräume:

Als Grundvektorraum V wird man die Klasse der absolut stetigen Funktionen,

$$u : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$$

deren erste Ableitung quadratisch integrierbar sind, wählen. In Abhängigkeit von den Randbedingungen wird dieser Grundvektorraum V dann auf Teilräume mit $u(a) = 0$ bzw. $u(b) = 0$ eingeschränkt. Von großem Interesse wird dann noch die Wahl des inneren Produktes sein.

Exemplarisch soll hier nur der Fall einer gemischten Randbedingung angegeben werden:

$$\begin{aligned} y(a) &= 0 \\ y(b) + dy'(b) &= 0 \quad d > 0. \end{aligned}$$

Als Vektorraum V wird die Menge der auf $[a,b]$ absolut stetigen Funktionen mit quadratisch integrierbaren Ableitungen und $v(a) = 0$ gewählt.

Das bilineare Funktional $a : V * V \rightarrow \mathbf{R}$, ist dann

$$a(u,v) = \int_a^b (pu'v' + quv)dx + (1/d)p(b)u(b)v(b),$$

und das lineare Funktional $F : V \rightarrow \mathbf{R}$

$$F(v) = \int_a^b rv \, dx .$$

Als inneres Produkt kann gewählt werden (!)

$$(u,v) = \int_a^b (u'v')dx .$$

Auch ein Verzicht auf die stetige Differenzierbarkeit von p und die Stetigkeit von q und r ist offenbar möglich.

Abschliessende Bemerkung

Auf dem ersten Blick erscheint die Umformulierung von einer Randwertaufgabe in eine Variationsgleichung etwas geheimnisvoll. Dieses ist nicht so! Partielle Integration oder die Wechselwirkung mit einem geeigneten Testraum liefern einen natürlichen Zugang:

$$-(p(x)y')' + q(x)y = r(x)$$

Multiplikation mit einer geeigneten „Testfunktion“ v liefert

$$(-(p(x)y')' + q(x)y)v = r(x)v.$$

Integration und partielle Integration über $[a,b]$ liefert

$$\begin{aligned} \int_a^b (-(p(x)y')' + q(x)y)v dx &= \int_a^b r(x)v dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_a^b ((p(x)y'v' + q(x)yv) dx - [p(x)y'v]_a^b &= \int_a^b r(x)v dx \end{aligned}$$

Ist z.B. $v(a) = v(b) = 0$ und wird V entsprechend gewählt, dann liegt eine der behandelten Variationsgleichungen vor!

Auch die Einbeziehung von inhomogenen Randbedingungen ist möglich. Die Aufgaben müssen dann entsprechend transformiert werden oder in affinen Teilräumen behandelt werden.

§ 9.6 Eine partielle (elliptische) Differentialgleichung

Gegeben sei jetzt die partielle Differentialgleichung

$$-\Delta u + c(x)u = f(x), \quad x \in \Omega$$

mit den Dirichlet-Randbedingungen

$$u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega .$$

Dabei seien Ω ein offenes und beschränktes Gebiet* aus \mathbf{R}^2 und (zunächst) $c(\cdot) \geq 0$ und $f(\cdot)$ stetige Funktionen auf $\overline{\Omega}$.

Zu einer „schwachen“ Formulierung dieser Aufgaben kann man über den folgenden Weg gelangen:

Es sei

$$D = \{ v / v \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ mit } v(\partial\Omega) = 0 \}.$$

Wir setzen voraus, dass das Gebiet so beschaffen ist, dass die Integralsätze von Gauss oder Green gewährleistet sind.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die ursprüngliche Aufgabe eine (klassische) Lösung aus D besitzt. Dann gilt für alle $v \in D$

$$-\int_{\Omega} v \Delta u dx + \int_{\Omega} c u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Da Ω die Bedingungen des Greenschen Satzes erfüllt, ist

$$-\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\omega.$$

Damit genügt die Lösung u auch der variationellen Gleichung

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + c u v) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \text{für alle } v \in D.$$

Diese variationelle Gleichung induziert in kanonischer Weise eine Bilinearform und eine Linearform:

$$a : D \times D \rightarrow \mathbf{R}$$

$$F : D \rightarrow \mathbf{R}$$

mit

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + c u v) dx$$

$$F(v) = \int_{\Omega} f v dx .$$

Wird der Vektorraum D mit dem inneren Produkt $[u, v] = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + u v) dx$ und der dadurch induzierten Norm $\|u\| = \left(\int_{\Omega} (\nabla u \nabla u + u u) dx \right)^{1/2}$ versehen, dann haben die Abbildungen $a(.,.)$ und $F(.)$ auf D die bereits im § 9.2 benutzten Eigenschaften:

- a ist bilinear, d.h. eine lineare Abbildung in jedem Argument;
- a ist beschränkt, d.h. es existiert ein M mit $a(u, v) \leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in D$;
- a ist symmetrisch, d.h. $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$;
- a ist koerziv, d.h. es existiert ein $\mu > 0$ mit $a(u, u) \geq \mu \|u\|^2 \quad \forall u \in D$
- F ist linear;
- F ist beschränkt.

Einige dieser Eigenschaften sind unmittelbar einsichtig. Die Beschränktheit und die Koerzivität von $a(.,.)$ sollen in Form eigenständiger Sätze formuliert werden:

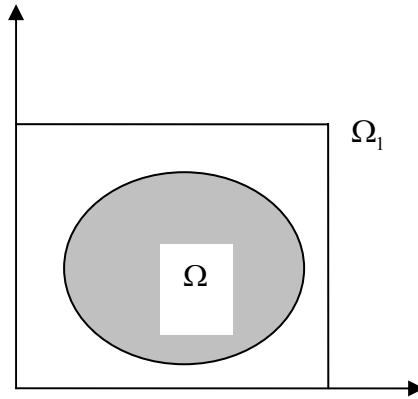
Satz 9.5 (Koerzitivität)

Es gibt eine Konstante $\mu > 0$ mit

$$a(u, u) \geq \mu \|u\|^2 \quad \forall u \in D.$$

Beweis:

Das Gebiet Ω ist beschränkt. Es gibt also ein Quadrat Ω_1 der Kantenlänge d , das Ω im Inneren enthält. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei der Nullpunkt Eckpunkt von Ω_1 .



Es sei $u \in D$, wegen $u(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ kann u auf Ω durch $u(x) = 0$ auf $\Omega_1 - \Omega$ stetig fortgesetzt werden. und es folgt

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} u_{x_1}(t_1, x_2) dt_1 \quad \text{für alle zulässigen } x_1.$$

Die Cauchy-Schwarze Ungleichung liefert dann

$$\begin{aligned} (u(x_1, x_2))^2 &= \left(\int_0^{x_1} u_{x_1}(t_1, x_2) dt_1 \right)^2 = \left(\int_0^{x_1} 1 * u_{x_1}(t_1, x_2) dt_1 \right)^2 \leq \\ &\leq \left(\int_0^{x_1} 1^2 dt_1 \right)^{1/2} \left(\int_0^{x_1} (u_{x_1}(t_1, x_2))^2 dt_1 \right)^{1/2} = d \int_0^{x_1} (u_{x_1}(t_1, x_2))^2 dt_1. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_0^d \int_0^d u(x_1, x_2)^2 dx_1 dx_2 \leq \int_0^d \int_0^d \left(d \int_0^{x_1} u_{x_1}(t_1, x_2)^2 dt_1 \right) dx_1 dx_2 = d^2 \int_0^d \int_0^d u_{x_1}(t_1, x_2)^2 dt_1 dx_2.$$

und (grob) sogar

$$\int_0^d \int_0^d u(x_1, x_2)^2 dx_1 dx_2 \leq d^2 \int_0^d \int_0^d (u_{x_1}(t_1, t_2)^2 + u_{x_2}(t_1, t_2)^2) dt_1 dt_2$$

Da u auf $\Omega_1 - \Omega$ gleich Null ist, kann auf die Integration über diesen Bereich verzichtet werden und es gilt

$$\int_{\Omega} u(x)^2 dx \leq d^2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx.$$

Definitionsgemäß ist

$$a(u,u) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla u + c(x)uu) dx .$$

Wegen $c(x) \geq 0$ und der oben bewiesenen Ungleichung gilt dann

$$a(u,u) \geq \int_{\Omega} (\nabla u \nabla u) dx \geq (1/d^2) \int_{\Omega} u^2 dx .$$

Damit gilt die gewünschte Ungleichung

$$(1+d^2) a(u,u) \geq \int_{\Omega} (\nabla u \nabla u) dx + \int_{\Omega} u^2 dx = \|u\|^2 .$$

Satz 9.6 (Beschränktheit)

Es gibt eine Konstante M mit

$$a(u,v) \leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u,v \in D.$$

Beweis:

Es ist

$$a(u,v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + c(x)uv) dx .$$

Eine Integralabschätzung und die Cauchy-Schwarz Ungleichung liefern, mit einer geeigneten Konstanten C,

$$a(u,v) \leq \left(\int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx \right)^{1/2} + C \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} v^2 dx \right)^{1/2} .$$

Nach dem vorangegangenen Beweis kann das Integral über das Quadrat der Funktionen durch die Gradienten abgeschätzt werden:

$$a(u,v) \leq \left(\int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx \right)^{1/2} + Cd^2 \left(\int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx \right)^{1/2} .$$

Daraus folgt das gewünschte Ergebnis mit $M = 1+Cd^2$.

Damit können die folgenden abstrakten linearen Variationsprobleme formuliert werden:

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } u \in D \text{ mit} \\ a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in D. \end{cases} \quad \text{(Variationsgleichung)}$$

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist ein } u \in D \text{ mit} \\ E(u) \leq E(v) \quad \forall v \in D. \end{cases} \quad \text{(Variationsaufgabe)}$$

Dabei sei $E : D \rightarrow \mathbf{R}$ das „Energiefunktional“

$$E(v) = (1/2)a(v,v) - F(v).$$

Bemerkungen

Abgesehen davon, dass D mit dem inneren Produkt

$$[u, v] = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + uv) dx$$

kein Hilbertraum ist, sind sämtliche Voraussetzungen des Satzes 9.1 erfüllt.

Auf endlich dimensionale Teilräume von D wäre der Satz 9.1 anwendbar. Aus praktischer Sicht kann dieses völlig ausreichend sein.

Theoretisch bedeutend ist, dass D mit dem gegebenen inneren Produkt vervollständigt werden kann und somit zu einem Hilbertraum erweitert werden kann.

Der gewünschte Hilbertraum ergibt sich z.B. durch Vervollständigung des Raumes $C_0^\infty(\Omega)$ mit der Norm

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} (\nabla u \nabla u + uu) dx \right)^{1/2}$$

aller auf Ω ∞ -oft stetig differenzierbaren Funktionen deren Träger kompakt ist und in Ω liegt. Der entstehende Hilbertraum ist ein Sobolev-Raum und wird als $H_0^1(\Omega)$ bezeichnet.

(H für Hilbertraum)

Wesentlich ist noch, dass auch die Definitionsbereiche von $a(\cdot, \cdot)$ und $F(\cdot)$ - unter Beibehaltung ihrer Eigenschaften - auf diesen Hilbertraum erweitert werden können.

Berücksichtigt man die gemachten Bemerkungen, dann gehören zur ursprünglichen Dirichlet-Aufgabe die folgenden schwachen Formulierungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Gesucht ist ein } u \in H_0^1(\Omega) \text{ mit} \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + c(x)uv dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{Variationsgleichung})$$

und

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Gesucht ist ein } u \in H_0^1(\Omega) \text{ mit} \\ E(u) \leq E(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (\text{Variationsaufgabe})$$

Dabei ist $E : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$ das „Energiefunktional“

$$E(v) = (1/2) \int_{\Omega} (\nabla v \nabla v + c(x)vv) dx - \int_{\Omega} f v dx .$$

Bemerkung:

Auf eine „Kleinigkeit“ muss noch hingewiesen werden. Die in den obigen Ausdrücken auftretenden Gradienten müssen jetzt nicht immer Ableitungen im üblichen Sinne sein. Auch verallgemeinerte Ableitungen sind zugelassen bzw. nötig.

§ 9.6 Die allgemeine (schwache) lineare Dirichlet-Aufgabe

Mit den Bemerkungen aus dem Anhang kann ein allgemeiner Existenzsatz für gleichmäßig elliptische Dirichlet-Aufgaben angegeben werden.

Gegeben sei der gleichmäßig elliptischer Differentialoperator

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^2 (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^2 b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \quad \text{mit } a^{ij} = a^{ji}$$

Betrachte dazu die Bilinearform

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^2 a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^2 b^i u_{x_i} v + cuv \right) dx$$

und die Linearform

$$F(v) = \int_{\Omega} f v dx .$$

Gesucht ist eine Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} Lu &= f \text{ auf } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Eine Lösung dieser Aufgabe ist dann eine Funktion u aus $H_0^1(\Omega)$ mit der Eigenschaft

$$a(u,v) = f(v) \text{ für alle } v \text{ aus } H_0^1(\Omega)$$

Satz 9.6

Die Koeffizienten der Differentialgleichung seien aus $C^\infty(\Omega)$ und $c(x) \geq 0$, dann besitzt die Randwertaufgabe für alle $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung.

Beweis

Ist $a(\cdot, \cdot)$ symmetrisch, dann kann mit dem vorangegangenen alles bewiesen werden. Ist jedoch a nicht symmetrisch (b_i ungleich Null), dann muss der Satz von Lax-Milgran benutzt werden.

§ 9.7 Die Methode der Finiten Elemente

1. Diskretisation des Gebietes

Der erste Schritt bei der Methode der finiten Elemente besteht in einer Diskretisation des Gebietes Ω . Es erfolgt eine Zerlegung des Gebietes in einfache Teilgebiete, den sogenannten Elementen. Exemplarisch werden hier nur Triangulierungen des Gebietes vorgenommen. Das Grundgebiet Ω sei vollständig in Dreiecke $\Omega_j, j = 1, 2, \dots, M$ zerlegt.

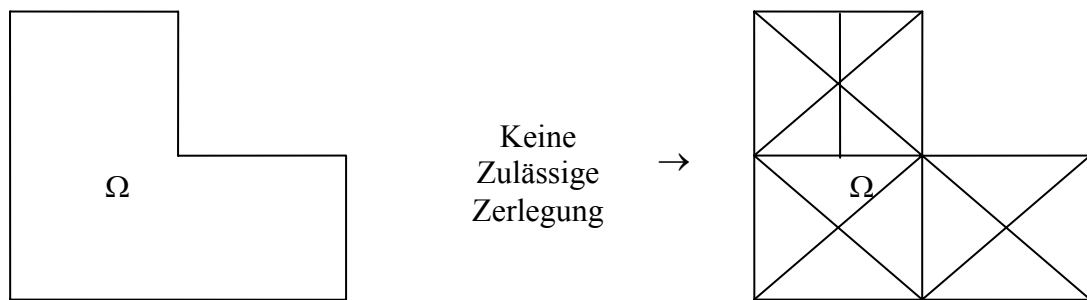
Die Zerlegung genüge der Bedingung

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^M \overline{\Omega}_j, \quad \overset{0}{\Omega}_i \cap \overset{0}{\Omega}_j = \emptyset \text{ falls } i \neq j.$$

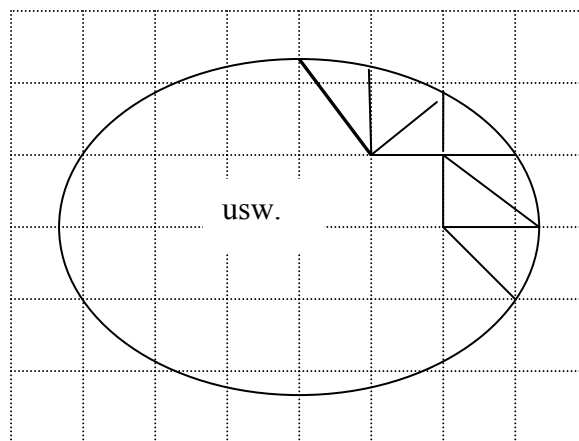
und für zwei beliebige Teilgebiete Ω_i und Ω_j gelte genau eine der folgenden Bedingungen

- $\Omega_i = \Omega_j$
- $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j$ bildet eine vollständige Kante von Ω_i wie auch von Ω_j
- $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j$ bildet ein Gitterpunkt der Zerlegung
- $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \emptyset$.

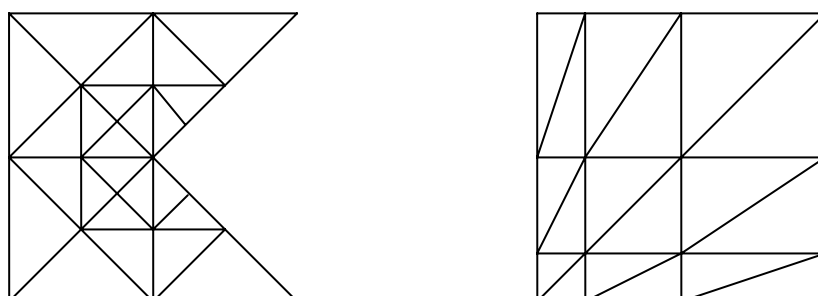
Beispiel



Lässt sich das Gebiet nicht als Vereinigung von Dreiecken darstellen, dann müssen andere Elemente gewählt werden oder eine approximative Zerlegung des Gebietes in Dreiecken erfolgen, z.B.: Das Grundgebiet Ω wird zunächst mit einem feinen und regelmäßigen Gitter überdeckt und anschließend erfolgt dann eine lokale Anpassung an den Rand $\partial\Omega$ durch Verschiebung von randnahen Punkten.



Ein Vorteil der Methode der finiten Elemente gegenüber Differenzenverfahren besteht in der einfachen und guten lokalen Anpassungsfähigkeit der Zerlegung an spezielle geometrische Formen des Grundgebietes Ω oder der Anpassung an besondere Informationsbedürfnisse:



Es ist einsichtig, dass Gittergeneratoren einen eigenständigen Bestandteil von Finite Elemente Programme bilden und dass die zugehörigen Heuristiken von nicht unbeträchtlicher Bedeutung sind.

Besteht Interesse an Konvergenzaussagen für die Finite Elemente Methode, dann sind Bedingungen an die Verfeinerungen der Zerlegung zu stellen. Insbesondere sind die Verfeinerungen quasiuniform zu wählen oder die Zlamal-Bedingung einzuhalten. Ist h die maximale Seitenlänge aller Dreiecke der Zerlegung eines Grundgebietes Ω , dann heißt eine Zerlegungsfolge quasiuniform, wenn es Konstanten $0 < c_1 < c_2$ gibt, so dass jedes Element der Zerlegungsfolge mit einem Kreis vom Radius $c_1 h$ einbeschrieben und mit einem Kreis mit dem Radius $c_2 h$ umschrieben werden kann. Ist α ein beliebiger Innenwinkel einer Dreieckszerlegung und die Zerlegungsfolge Quasiuniform, dann gibt es eine unabhängige Schranke $\underline{\alpha}$ mit

$$\alpha \geq \underline{\alpha} > 0$$

(Zlamal-Bedingung). Weitere Untersuchungen zeigen, dass in manchen Fällen die Konvergenz gesichert ist, wenn es ein $\bar{\alpha}$ gibt mit

$$0 < \alpha < \bar{\alpha} \quad \text{und} \quad \bar{\alpha} < \pi/2.$$

Zu vermeiden sind also zu stumpfe Winkel!

2. Die Ansatzfunktionen

Ein besonderes Charakteristikum der Methode der Finiten Elemente ist die Auswahl der Ansatzfunktionen. Diese werden insbesondere so gewählt, dass die zu lösenden Gleichungssysteme dünn besetzt sind.

Die Dirichlet-Aufgaben führen zur abstrakten linearen Aufgabe:

„Gesucht ist ein $u \in V$ mit

$$a(u, v) = f(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Für einen (abgeschlossenen) Unterraum $V_h \subset V$ führt diese Aufgabe zur Näherungsaufgabe:

„Gesucht ist ein $u_h \in V_h$ mit

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \text{für alle } v_h \in V_h.$$

Hat V_h eine endliche Basis $(\varphi_i)_{i=1}^N$ dann führt die letzte zu einem äquivalenten Gleichungssystem

$$A_h c = f_h,$$

$A_h = (a(\varphi_i, \varphi_k))_{i,k=1}^N$ und $f_h = (f(\varphi_i))_{i=1}^N$, zur Bestimmung der Koeffizienten $(c_i)_{i=1}^N$ mit

$$u_h = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i.$$

Es wurde bereits oben erwähnt, dass es zur Methode der Finiten Elemente gehört, die Ansatzfunktionen φ_i in ganz besonderer Art zu wählen:

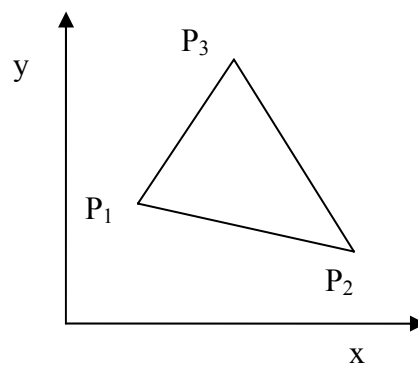
Ist $\bar{\Omega}$ die Vereinigung von endlich vielen Dreiecken, dann soll die gesuchte Funktion u_h (hier) in jedem Dreieck durch lineare Funktionen

$$u(x,y) = a + bx + cy$$

approximiert werden (auch bilineare Polynome oder andere ganz spezielle Polynome sind möglich).

Sind P_1, P_2, P_3 die drei Ecken eines nicht entarteten Dreiecks (in einer Reihenfolge entgegen dem Uhrzeigersinn), dann ist die Interpolationsaufgabe

$$u(P_i) = f_i \quad i = 1, 2, 3$$



eindeutig lösbar.

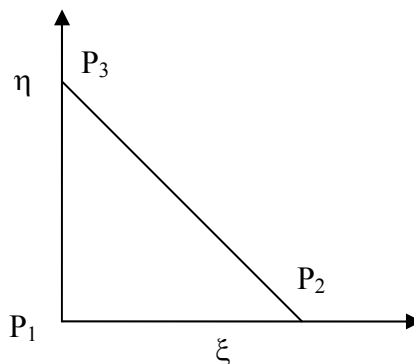
Durch die drei linearen Polynome (Formfunktionen) mit der Interpolationseigenschaft

$$\varphi_{\Omega_k}^i(P_j) = \delta_{ij}, \quad i=1, 2, 3$$

kann die Interpolationsaufgabe, $u(P_i) = f_i$, $i = 1, 2, 3$, besonders einfach gelöst werden:

$$u(P) = \sum_{i=1}^3 f_i \varphi_{\Omega_k}^i(P).$$

Ist T_k z.B. das Dreieck mit der Kathetenlänge 1



dann haben die Formfunktionen die Gestalt

$$\varphi_{T_k}^1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$\varphi_{T_k}^2(\xi, \eta) = \xi$$

$$\varphi_{T_k}^3(\xi, \eta) = \eta.$$

Ein Dreieck Ω_k in allgemeiner Lage mit den Eckpunkten $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ und $P_3(x_3, y_3)$ kann durch die lineare Transformation

$$\begin{aligned}x &= x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\y &= y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta\end{aligned}$$

eindeutig auf das gleichschenklige, rechtwinklige Einheitsdreieck T_k mit der Kantenlänge 1 abgebildet werden.

D.h. zu jedem Dreieck gehören drei Funktionen die wir uns auf ganz $\bar{\Omega}$ durch den Wert Null „fortgesetzt“ denken.

Die gesuchte Approximation der Lösung der Variationsaufgabe ergibt sich als

$$u_h = \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^3 c_{ik} \phi_{\Omega_k}^i(x, y).$$

Wichtig für das Folgende ist nun: Soll der Wert der Näherungslösung in einem Gitterpunkt (x_j, y_j) ermittelt werden, dann müssen nur die Koeffizienten der Formfunktionen, die an dieser Stelle den Wert Eins haben, aufaddiert werden.

3. Die Aufstellung der Gleichungen

Die letzte Bemerkung ist Wegweisend:

Es soll angestrebt werden ein Gleichungssystem aufzustellen, welches als Unbekannte (sofort) die Werte der gesuchten Näherungsfunktion hat. Der Ansatz mit den linearen Funktionen auf jedem Dreieck und deren Darstellung durch Formfunktionen legt nahe, dass dieses auch möglich ist.

Die völlig formalisierte und systematisierte Aufstellung der Systemgleichungen gehört zum Wesen der Methode der Finiten Elemente und soll einmal exemplarisch durchgeführt werden.

Gegeben sei die Dirichlet-Aufgabe

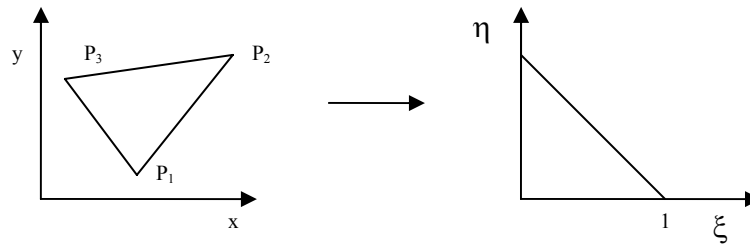
$$\begin{aligned}-\Delta u + c(x)u &= f(x), \quad x \in \Omega \\u(x) &= 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

auf einem geeigneten Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^2$.

Wird die Aufgabe im schwachen Sinne interpretiert und liegt eine Triangulierung des Gebietes Ω in Dreiecken Ω_i vor $i = 1, 2, 3, \dots, N$ vor, dann sind die folgenden Integrale von Interesse:

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_i} \nabla u \nabla v \, dx \, dy \\ \iint_{\Omega_i} u v \, dx \, dy \\ \iint_{\Omega_i} f v \, dx \, dy.\end{aligned}$$

Um die Integration über die beliebigen Dreiecke (Elemente) zu vereinheitlichen, wird das allgemeine Dreieck Ω_i in ein Einheitsdreieck T_i überführt:



Dieses kann mit der bereits oben erwähnten Transformation

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta \end{aligned}$$

erfolgen.

Nach der Variablentransformationsregel für Integrale in mehreren Variablen gilt dann

$$\iint_{\Omega} h(x, y) dx dy = \iint_{T_1} h(\xi(x, y), \eta(x, y)) \begin{vmatrix} x_{\xi} & x_{\eta} \\ y_{\xi} & y_{\eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta.$$

Dabei ist

$$J = \begin{vmatrix} x_{\xi} & x_{\eta} \\ y_{\xi} & y_{\eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

oder das doppelte der Fläche des Dreiecks Ω_1 .

Wir betrachten jetzt das erste Integral

$$\iint_{\Omega_1} \nabla u \nabla v dx dy.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_1} \nabla u \nabla v dx dy &= \iint_{\Omega_1} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy = \\ &= \iint_{T_1} ((u_{\xi} \xi_x + u_{\eta} \eta_x)(v_{\xi} \xi_x + v_{\eta} \eta_x) + (u_{\xi} \xi_y + u_{\eta} \eta_y)(v_{\xi} \xi_y + v_{\eta} \eta_y)) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Differentiation nach x bzw. y der beiden Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta \end{aligned}$$

liefert

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{y_3 - y_1}{J} & \text{bzw.} & & \eta_x &= \frac{y_1 - y_2}{J} \\ \xi_y &= \frac{x_1 - x_3}{J} & & & \eta_y &= \frac{x_2 - x_1}{J} \end{aligned}$$

Mit den drei Formfunktionen auf den Einheitsdreieck T_i

$$\varphi_{T_i}^1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$\varphi_{T_i}^2(\xi, \eta) = \xi$$

$$\varphi_{T_i}^3(\xi, \eta) = \eta.$$

können nun in einfacher Weise die Werte der Integrale

$$\iint_{\Omega_i} \nabla \varphi_{\Omega_i}^j \nabla \varphi_{\Omega_i}^k dx dy \quad j, k = 1, 2, 3$$

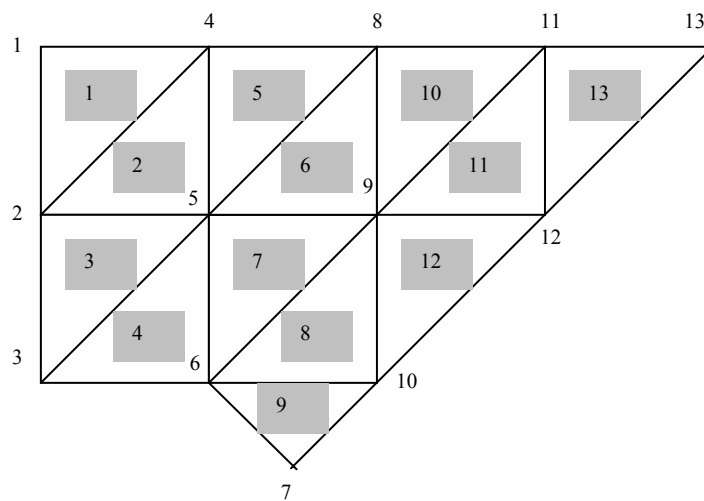
der zugehörigen Formfunktionen auf Ω_i ermittelt werden.

Für das Dreieck Ω_i mit den Ecken $\{1, 2, 3\}$ (oder $\{j, k, l\}$) führen die Integrale zur „Elementsteifigkeitsmatrix“

$$A^i = \frac{1}{2J} \begin{pmatrix} (y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2 & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) & (y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2 & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) & (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Vorbemerkungen kann die Steifigkeitsmatrix eines Systems nun schnell aufgebaut werden.

Als Beispiel betrachten wir das folgende Gebiet und eine zugehörige Triangulierung



Die Grau unterlegten Zahlen geben die Dreiecke Ω_i und die übrigen Zahlen die Ecken der Triangulierung an. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Katheten der großen Dreiecke die Länge 1 haben.

Die Daten des Problems können dann in der folgenden Tabelle zusammengefasst werden:

Eckenkoordinaten			Element	Knotennummern		
i	x_i	y_i	Ω_i	P_1	P_2	P_3
1	0	2	1	1	2	4
2	0	1	2	2	5	4
3	0	0	3	2	3	5
4	1	2	4	3	6	5
5	1	1	5	4	5	8

6	1	0	6	5	9	8
7	1.5	-0.5	7	5	6	9
8	2	2	8	6	10	9
9	2	1	9	6	7	10
10	2	0	10	8	9	11
11	3	2	11	9	12	11
12	3	1	12	9	10	12
13	4	2	13	11	12	13

Diese Daten erlauben den Aufbau des gesuchten Gleichungssystems. Die Steifigkeitsmatrix besteht zunächst aus 13*13 Elementen. Die Besetzung der Matrix ergibt sich aus den zu den Elementen gehörigen Elementsteifigkeitsmatrizen.

Das erste Element addiert zur Steifigkeitsmatrix Werte entsprechend der zugehörigen Elementsteifigkeitsmatrix an den Stellen die mit # gekennzeichnet sind. Das zweite Element entsprechend an den Stellen die durch * gekennzeichnet sind. Das dritte Element liefert ° und das vierte §, usw.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	#	#		#									
2	#	#*°	°	#*	*°								
3		°	°§		°§	§							
4	#	#*		#*	*								
5		*°	§	*°	*°§	§							
6			§		§	§							
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													

Bei den Dirichlet Randbedingungen werden jetzt die Zeilen und Spalten gestrichen die zu Randgitterpunkten gehören. Also 1,2,3,4,6,7,8,10,11,12,13.

4. Eine Fehlerabschätzung

Es ist bemerkenswert, wie die Fehlerabschätzungen bei der Methode der Finiten Elemente Aussehen:

Satz

Gegeben sei die Dirichlet-Aufgabe aus § 9.1. Die Lösung y der Aufgabe sei zweimal stetig differenzierbar. Die maximale Länge der Seiten der Dreiecke der Triangulierung sei h . Der kleinste Winkel aller in der Triangulierung auftretenden Dreiecken sei θ . u_h sei die mit linearen Polynomen ermittelte Näherungslösung. Dann gilt

$$\|y - u_h\|_{H^1} \leq K \left(\frac{h}{\sin \theta} \right)$$

mit einer geeigneten Konstanten K .

Anhang (Sobolev Räume und verallgemeinerte Ableitungen)

1. Der Raum $L^2(\Omega)$

Es sei Ω eine beschränkte offene Teilmenge aus \mathbf{R} oder \mathbf{R}^2 . Man betrachte die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen $R(\Omega)$ auf Ω . Für das Folgende werden Riemann-integrierbare Funktionen deren Werte sich nur auf Mengen vom Maß Null unterscheiden als gleich bezeichnet. Nach Definition sind Riemann-integrierbare Funktionen beschränkt und stetig bis auf Mengen vom Maß Null.

Durch das innere Produkt

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx$$

wird $R(\Omega)$ zu einem unitären Raum und mit der induzierten Norm

$$\|u\|_{0,2} = \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{1/2}$$

zu einem normierten Raum.

Es sei dann $L^2(\Omega)$ die Vervollständigung von $R(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{0,2}$.

Erfreulicherweise kann die Klasse der Funktionen $L^2(\Omega)$ auch anders charakterisiert werden:

Es ist die Klasse der quadratisch im Sinne von Lebesgue integrierbaren Funktionen. Diese bilden mit der Norm $\|\cdot\|_{0,2}$ einen Banachraum bzw. Hilbertraum.

Dieser Hilbertraum wird häufig auch als der Sobolev-Raum

$$H^0(\Omega) \text{ oder } W_2^0(\Omega)$$

bezeichnet.

2. Verallgemeinerte Ableitungen. Die Räume $H^k(\Omega)$

Es sei $C_0^\infty((a, b))$ die Menge der reellwertigen unendlich oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger in $[a, b]$. Nach den Regeln der partiellen Integration gilt dann für eine beliebige stetig differenzierbare Funktion $u : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ und $v \in C_0^\infty((a, b))$

$$\int_a^b u'v dx = - \int_a^b uv' dx$$

Diese Identität bildet den Ausgangspunkt für die Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffes über Lebesgue-Räume.

Zur Charakterisierung von Ableitungen im \mathbf{R}^2 wird ein Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_i \geq 0$, ganzzahlig, verwendet. Mit $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ bezeichnet

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} u$$

die Ableitung $|\alpha|$ -ter Ordnung zum Multiindex α . In Übertragung der Rechenregel für die

partielle Integration wird dann eine messbare Funktion u als verallgemeinert differenzierbar zum Multiindex α bezeichnet, wenn eine messbare Funktion w existiert mit

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w v dx \quad \text{für alle } v \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Die Funktion $D^{|\alpha|} u = w$ wird dann verallgemeinerte Ableitung von u zum Multiindex α genannt.

Beispiel

Es sei $\Omega = (0,2)$ und

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Dann ist die verallgemeinerte Ableitung von u gegeben durch

$$w(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Schnell kann für alle $v \in C_0^{\infty}((0,2))$ nachgerechnet werden:

$$\int_0^2 u v' dx = \int_0^1 x v' dx + \int_1^2 v' dx = - \int_0^1 v dx + v(1) - v(1) = - \int_0^2 w v dx.$$

Aufgabe

Zeige, dass die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{für } 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

keine verallgemeinerte Ableitung besitzt.

Mit den verallgemeinerten Ableitungen kann der Sobolev-Raum $W_2^k(\Omega)$, $k \geq 1$ ganzzahlig, eingeführt werden. Der Raum $W_2^k(\Omega)$ ist die Menge der Funktionen aus $L^2(\Omega)$, die alle verallgemeinerten Ableitungen bis zur Ordnung k besitzen, wobei diese ebenfalls zu $L^2(\Omega)$ gehören. Die Räume $W_2^k(\Omega)$ bilden Hilberträume mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} D^{\alpha} u D^{\alpha} v \right) dx$$

und werden häufig auch als $H^k(\Omega)$ bezeichnet.

Bemerkenswert ist noch - wenn Ω nicht aus \mathbf{R} ist -, dass die Elemente von $H^1(\Omega)$ weder beschränkt noch stetig sein müssen. Dieses zeigt das Beispiel:

$$\Omega = \{ x / |x| < 1/2 \} \quad \text{und } v(x) = |\log(|x|)|^{k/2} \quad \text{mit } k \text{ aus } (0,1).$$

3. Spuren

Es sei $\bar{\Omega}$ der Abschluss von Ω und $\partial\Omega$ der Rand von Ω . Ist $\partial\Omega$ hinreichend glatt, dann kann der Definitionsbereich der Funktionen aus $H^1(\Omega)$ in „natürlicher“ Weise auf den Rand

$\partial\Omega$ fortgesetzt werden. Diese natürliche Fortsetzung einer Funktion aus $H^1(\Omega)$ wird als Spur der Funktion bezeichnet.

Ist v eine Hölderstetige Funktion aus $H^1(\Omega)$, dann kann seine Spur sofort angegeben werden.

Ist v lediglich aus $H^1(\Omega)$, dann wird man die Spur dieser Funktion als Grenzwert der Restriktionen auf $\partial\Omega$ geeigneter Funktionen aus $C^1(\bar{\Omega})$ und gegen v konvergenter Folgen definieren. Etwas präziser:

Satz

Es sei Ω beschränkt und $\partial\Omega$ einmal stetig differenzierbar. Dann existiert ein beschränkter linearer Operator

$$T: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$$

mit den Eigenschaften:

- (i) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ falls $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$
- (ii) $\|Tu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$ mit einer nur von Ω abhängigen Konstanten.

Außerdem gilt noch der beruhigende

Satz

Es sei $H_0^1(\Omega)$ der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$ dann gilt

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad Tu = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

Literatur:

- [1] Ch. Großmann und H.-G. Roos. Numerik partieller Differentialgleichungen. Teubner Studienbücher. 1994.
- [2] J. Stoer und R. Bulirsch. Einführung in die Numerische Mathematik. Springer Verlag. 1973.
- [3] Schwarz, H.R., Numerische Mathematik. Teubner 1986.
- [4] Schwarz, H.R., Methode der finiten Elemente. Teubner 1980.
- [5] Ruas, Vitoriano. An Introduction to the Mathematical Foundations of the Finite Element Method. Seminario Brasileiro de Analise. SBA 56. 2002.