Theorie und Numerik von Differentialgleichungen
mit
MATLAB und SIMULINK

K. Taubert
Universität Hamburg
SS08

Algebro-Differentialgleichungen

8 LINEARE UND NICHTLINEARE ALGEBRO-DIFFERENTIAL GLEICHUNGEN. DIFFERENZENVERFAHREN FÜR INDEX 1 und 2 PROBLEME

Es werden eine Klassifizierung linearer Algebro-Differentialgleichungen (lineare DAE's) und die Standardtypen nichtlinearer Algebro-Differentialgleichungen vom Index 1-3 eingeführt. Konvergenzsätze für Differenzenverfahren vom Index 1 und 2 werden angegeben.

§ 7.1 Allgemeines

Gleichgewichte zwischen Kräften oder Strömen und Spannungen bei mechanischen oder elektrischen Systemen führen auf Gleichungen der Form

$$F(\dot{x},x,t) = 0, \qquad F : \mathbf{R}^n * \mathbf{R}^n * \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n \qquad (*)$$

mit nicht notwendig regulärem $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$.

Durch die mögliche Singularität der partiellen Ableitung von f nach $\dot{x}$ ist eine Überführung von (*) in die Gestalt

$$\dot{x} = G(t, x)$$

i.a. nicht möglich und übrigens manchmal auch völlig unzweckmäßig.
Eine numerische Auflösung von (*) erfordert deshalb weitergehende Untersuchungen welche zunächst mit einer Klassifikation der Aufgaben einhergeht.

Für Algebro-Differentialgleichungen (DAE's)

$$A\dot{x} + Bx = h,$$

mit reellen n*n Matrizen A,B und einer Funktion $h : R^n \to R^n$, gibt es eine vollständige Lösungstheorie und eine befriedigende Klassifikation.

Schon der Fall

$$A(t)\dot{x} + B(t)x = h$$

ist noch nicht voll verstanden.
Nichtlineare DAE's werden nur in so genannten Standardtypen behandelt, z.B. (Index 1 Standardtyp)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,y) \\ 0 &= g(x,y), \end{aligned} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{regulär.}$$

Im Vergleich mit linearen gewöhnichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten können die linearen DAE's einige „merkwürdige" Eigenschaften besitzen.
Hierzu: Die Aufgabe

$$A\dot{x} + Bx = h$$

kann

1. keine oder unendlich viele Lösungen besitzen.
2. Es gibt nur Lösungen für bestimmte Anfangswerte.
3. Die (eindeutigen) Lösungen können von Ableitungen der Funktion h abhängen.

Beispiel 7.1
Die Aufgabe

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

hat die folgenden „Lösung(en)" mit den Komponenten

$$\begin{aligned} x_1(.) &= \text{beliebige Funktion mit } x_1(0) = \alpha_1, \\ x_2(t) &= e^{-t}\alpha_2 + \int_0^t e^{-(t-s)}(-1)x_3(s)ds, \\ x_3(.) &= \text{beliebig integrierbare Funktion mit } x_3(0) = \alpha_3. \end{aligned}$$

Beispiel 7.2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

mit $\dot{h}_1 \neq h_2$ ist nicht lösbar.

Beispiel 7.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

ist für beliebig vorgegebenes $x_1(0) = \alpha_1$ eindeutig lösbar, sofern h_1 integrierbar ist.

Beispiel 7.4
Die Aufgabe

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

führt zu

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 + x_1 &= h_1 \\ x_2 &= h_2 \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad x_1 = h_1 - \dot{h}_2 .$$

Mögliche Lösungen hängen also auch von der Ableitung von h_2 ab.

§ 7.2 Reguläre Matrixscharen

Es seien A,B reelle n*n-Matrizen und (A,B) die Matrixschar

$$(A,B) = \{ C \,/\, \exists \quad \lambda \in R \quad \text{mit} \quad C = A + \lambda B \} .$$

Definition:
(A,B) heißt reguläre Matrixschar, wenn

$$P(\lambda) = \mathrm{Det}(\lambda A + B)$$

nicht das Nullpolynom ist.

Bemerkungen:
(A,B) ist genau dann eine reguläre Matrixschar, wenn es ein $\lambda_0 \in R$ gibt, so dass $\lambda_0 A + B$ regulär ist.
Ist (A,B) eine reguläre Matrixschar, dann gibt es höchstens n verschiedene $\lambda_i \in R$ mit $\mathrm{Det}(\lambda_i A + B) = 0.$
Ein pragmatischer Versuch zur Auflösung von

$$A\dot{x} + Bx = 0$$

führt unmittelbar zum Konzept regulärer Matrixscharen:
Mit dem impliziten Euler-Verfahren ergibt sich

$$A(\frac{x_{n+1} - x_n}{h}) + Bx_{n+1} = 0$$

oder $(\frac{1}{h}A + B)x_{n+1} = \frac{1}{h}Ax_n$. Eine vernünftige Forderung ist dann $(\frac{1}{h}A + B)^{-1}$ existiert bis auf endlich viele $\lambda = 1/h$.

Beispiel 7.5
Die bereits als Beispiel 7.1 angegebene Algebro-Differentialgleichung

$$A\dot{x} + Bx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\dot{x} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefert eine nicht reguläre Matrixschar (A,B).

Beispiel 7.6
Das Beispiel 7.2 führt auf

$$\text{Det}\,(\lambda A + B) = \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \equiv 0\,.$$

Beispiel 7.7
Das Beispiel 7.3 führt auf

$$\text{Det}\,(\lambda A + B) = \text{Det}\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda + 1 \neq 0\,.$$

Beispiel 7.8
Das Beispiel 7.4 führt auf

$$\text{Det}\,(\lambda A + B) = \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0\,.$$

Bekanntlich gibt es für reelle n*n Matrizen eine (Jordan-) Normalform. Auch reguläre Matrixscharen lassen sich in eine (Kronecker-) Normalform (KNF).

Satz (siehe z.B. Gantmacher, Matrizenrechnung II, 1971)
Sei (A,B) eine reguläre Matrixschar. Dann gibt es reguläre Transformationsmatrizen P und Q, so dass die transformierte Matrixschar (PAQ,PBQ) die folgende Gestalt besitzt:

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \qquad PBQ = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind E_1,J n_1*n_1-Matrizen und N,E_2 n_2*n_2-Matrizen. Außerdem gilt

J ist eine Matrix in Jordan Normalform,
E_1, E_2 sind Einheitsmatrizen,
0 sind i.a. nicht quadratische Nullmatrizen und
N ist eine Matrix in Jordan Normalform zu den Eigenwerten $\lambda = 0$.

N hat also die folgende Gestalt

$$N = \text{diag}(\,J_1(0), J_2(0), \ldots, J_m(0))$$

mit z.B.

$$J_i(0) = 0\,, \quad J_i(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad J_i(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definition (Index)
Unter dem Index einer Matrixschar (A,B) versteht man die Dimension des größten Jordanblocks $J_i(0)$ der Matrix N. Tritt die Matrix N nicht in der KNF auf (n_2=0), dann wird der Index zu Null definiert.

Bemerkungen
In der Praxis wird der Index einer Matrixschar i.a. nicht über die KNF bestimmt.
Ist k der Index des Systems, dann gilt

$$N^{k-1} \neq 0 \quad \text{und} \quad N^k=0.$$

§ 7.3 Lineare konstante DAE's

Gegeben sei eine lineare konstante DAE

$$A\dot{x} + Bx = h$$

mit einer regulären Matrixschar (A,B). Damit ist (theoretisch) die Angabe der Lösungen einer DAE mit konstanten Koeffizienten unproblematisch.

Die KNF entkoppelt die DAE in einen differentiellen Anteil

$$\dot{y}_1 + Jy_1 = h_1 \qquad y_1, h_1 \in R^{n_1}$$

und einen algebraischen Anteil

$$N\dot{y}_2 + y_2 = h_2 \qquad y_2, h_2 \in R^{n_2}.$$

Der algebraische Anteil kann weiter in Untersysteme der Form

$$J_i(0)\dot{y}_{2i} + y_{2i} = h_{2i}.$$

entkoppelt werden
Der differentielle und der algebaische Anteil können dann gelöst werden.

Beispiel 7.9
Die lineare DAE

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix}$$

führt zu einer Matrixschar mit dem Index 3 und kann sukzessive von der ersten zur dritten Gleichung aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1 & & \\ \dot{y}_1 + y_2 &= h_2 & \Rightarrow \qquad & y_2 = h_2 - \dot{h}_1 \\ \dot{y}_2 + y_3 &= h_3 & & y_3 = h_3 - \dot{h}_2 + \ddot{h}_1 \end{aligned}$$

An diesem einfachen Beispiel kann erkannt werden, dass bei DAE's beliebige Anfangswerte nicht vorgegeben und die Lösungen von höheren Ableitungen der rechten Seite abhängen können.

Definition
Die lineare und konstante DAE

$$A\dot{x} + Bx = h$$

heißt regulär und vom Index k, wenn (A,B) regulär mit dem Index k und $h^{(k-1)}$ stetig ist.
Ein Anfangswert $x_0 \in R^n$ heißt konsistent zur regulären Aufgabe vom Index k, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$A\dot{x} + Bx = h\,, \qquad x(0) = x_0\,.$$

Beispiel 7.10
Gegeben sei die DAE

$$A\dot{x} + Bx = h \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = h\,.$$

Mit den Transformationen $P = E$ und $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ geht das System über in

$$PAQQ^{-1}\dot{x} + PBQQ^{-1}x = Ph \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{y} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = \tilde{h}$$

Es liegt also eine DAE vom Index 2 vor (mit $n_1 = 1$ und $n_2 = 2$).

Satz
Die Anfangswertaufgabe

$$A\dot{x} + Bx = 0\,, \qquad x(0) = 0$$

ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Matrixschar (A,B) regulär ist.

Beweis
Ist (A,B) regulär, dann liefert die KNF als einzige Lösung die Funktion $x(t) = 0$. Ist (A,B) nicht regulär dann ergibt sich mit dem Ansatz $x(t) = e^{\lambda t} v_\lambda$, $\| v_\lambda \|_2 \neq 0$, mindestens eine nichttriviale Lösung der Anfangswertaufgabe.

§ 7.4 Die Bestimmung vom Index einer DAE

Der Index einer linearen Algebro-Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten wurde bis jetzt über die KNF eingeführt.

Bemerkungen
Sowohl die KNF als auch die vorangegangenen Beispiele zeigten, dass die Lösungen einer regulären DAE

$$A\dot{x} + Bx = h$$

vom Index k, von der (k-1)-ten Ableitung der Funktion h abhängen. In der vorliegenden Situation kann sogar gesagt werden, dass der Index einer regulären DAE die Anzahl der Differentiationen ist, die notwendig sind um das System in ein vollständiges System von Differentialgleichungen zu überführen.

Beispiele 7.11
Bei der Index 1 Aufgabe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

führt eine Differentiation der zweiten Gleichung auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \dot{h}_2 \end{pmatrix}.$$

Die Index 2 Aufgabe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

kann durch zwei Differentiationen in ein vollständiges System von Differentialgleichungen überführt werden.
Eine Differentiation der zweiten Zeile führt zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \dot{h}_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

und damit auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \dot{h}_2 \\ h_3 - \dot{h}_2 \end{pmatrix}.$$

Eine Differentiation in der dritten Zeile führt dann zu einer vollständigen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 - \ddot{h}_2 \end{pmatrix}.$$

Eine Verallgemeinerung des Beispiels führt zu einem Algorithmus zur Bestimmung des Indexes einer Matrixschar (A,B).

Gegeben sei

$$A\dot{x} + Bx = h\,.$$

Schritt 0 : $A(0) = A\,,\quad B(0) = B$
$k = 0$
$r(0) = \text{Rang}\,(A(0))$

Prüfung 1 : $r(k) = n$
Ja : Index = k
Nein : Prüfung 2

Prüfung 2 : $k > n$?
Ja : Die Matrixschar ist singulär
Nein : $k \rightarrow k+1$

Schritt k+1 $k = k+1$
Bestimme eine reguläre Matrix R(k) mit R(k)A(k-1) enthält maximale Anzahl von Nullzeilen:

Es sei $R(k)A(k\text{-}1) = \begin{pmatrix} A_1(k-1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R(k)B(k\text{-}1) = \begin{pmatrix} B_1(k-1) \\ B_2(k-1) \end{pmatrix}.$

Setze A(k) und B(k) (Differentiation)

$$A(k) = \begin{pmatrix} A_1(k-1) \\ B_2(k-1) \end{pmatrix}, \qquad B(k) = \begin{pmatrix} B_1(k-1) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gehe zur Prüfung 1

§ 7.5 Bemerkungen zu nichtlinearen Algebro-Differentialgleichungen

Wir betrachten ein System von Gleichungen ($F : \mathbf{R}^n * \mathbf{R}^n * \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$)

$$F(\dot{x}, x, t) = 0 \qquad (*)$$

und nehmen an, dass F hinreichend oft differenzierbar ist.
Die Gleichung (*) hat entlang einer „Lösung“ den Differentiationsindex m, wenn m die kleinste Anzahl von Differentiationen

$$F(\dot{x}, x, t) = 0\,, \quad \frac{d}{dt}F(\dot{x}, x, t) = 0, \quad \ldots\ , \quad \frac{d^m}{dt^m}F(\dot{x}, x, t) = 0 \qquad (**)$$

ist, so dass aus den n*m Gleichungen (**) ein explizites System von n Differential-gleichungen

$$\dot{x} = G(x, t)$$

entsteht.

Beispiel
Mit f,g : **R*R** $\rightarrow$ **R** sei

$$F(y',z',y,z)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} y' &= f(y,z) \\ 0 &= g(y,z) \end{aligned}$$

Ist (y(t),z(t)) eine „Lösung" dieser Algebro-Differentialgleichung, dann gilt

$$\begin{aligned} y'(t)-f(y(t),z(t)) &= 0 \\ g(y(t),z(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\frac{d}{dt}F(y',z',y,z)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} y''-\ f_y y'-f_z z' &= 0 \\ g_y y'+g_z z' &= 0. \end{aligned}$$

Ist $g_z \neq 0$, dann kann ein zugehöriges System von Differentialgleichungen erster Ordnung erzeugt werden

$$\begin{aligned} y' &= f(y,z) \\ z' &= -g_z^{-1} g_y y' = -g_z^{-1} g_y f(y,z). \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle gibt Stellvertreter für Algebro-Differentialgleichungen vom Index 1-3 an:

Index	Nichtlinear	Bedingungen		Linear
1	$y' = f(y,z)$ $0 = g(y,z)$	$g_z \neq 0$	$a_{22} \neq 0$	$y' = a_{11}y+a_{12}z$ $0 = a_{21}y+a_{22}z$
2	$y' = f(y,z)$ $0 = g(y)$	$g_y f_z \neq 0$	$a_{12}a_{21} \neq 0$	$y' = a_{11}y+a_{12}z$ $0 = a_{21}y$
3	$y' = f(y,z)$ $z' = k(y,z,u)$ $0 = g(y)$	$g_y f_z\ k_u \neq 0$	$a_{12}a_{31}a_{23} \neq 0$	$y' = a_{11}y+a_{12}z$ $z' = a_{21}y+a_{22}z+a_{23}u$ $0 = a_{21}y$

Neben dem Differentiationsindex gibt es bei Algebro-Differentialgleichungen noch den Perturbationsindex:

Die Gleichung

$$F(\dot{x},x,t)=0$$

hat den Perturbationsindex m entlang einer Lösung u(.) auf [0,T], wenn m die kleinste Zahl ist mit

$$\| \hat{x}(t) - x(t) \| \leq C (\| \hat{x}(0) - x(0) \| + \max_{0 \leq \xi \leq T} \| \delta(\xi) \| + \ldots\ldots + \max_{0 \leq \xi \leq T} \| \delta^{m-1}(\xi) \|)$$

für alle x(.) mit $F(\dot{x}(t), x(t), t) = \delta(t)$.

Bemerkung
Differentiationsindex und Perturbationsindex können sich im Fall m>1 unterscheiden. Für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten stimmen Sie aber überein.

Die einfachste Methode zur numerischen Integration einer nichtlinearen Algebro-Differentialgleichung

$$F(\dot{x}, x, t) = 0$$

wurde bereits oben angedeutet und besteht darin, dass implizite Euler Verfahren zu benutzen

$$F(\frac{x_n - x_{n-1}}{h_n}, x_n, t_n) = 0.$$

Satz
Die kanonische Index 1 Aufgabe

$$\begin{aligned} y' &= f(y,z,t) \\ 0 &= g(y,z,t) \end{aligned}$$

werde mit dem impliziten Euler Verfahren gelöst. Der Anfangsfehler sei von der Größenordnung O(h), dann gilt für den globalen Fehler

$$y_n - y(t_n) = O(h) \quad \text{und} \quad z_n - z(t_n) = O(h)$$

für $t_n - t_0 = nh < K$.

Dieses Ergebnis ist leicht einsehbar. Die numerische Integration mit dem impliziten Euler Verfahren entspricht einer Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit diesen Verfahren (!):

Betrachte

$$\begin{aligned} y' &= f(y,z,t) \\ 0 &= g(y,z,t) \end{aligned}$$

mit invertierbarem g_z. Mit dem Satz über implizite Funktionen gilt dann

$$y' = f(y, h(y,t), t).$$

Das implizite Euler Verfahren führt auf

$$\begin{aligned} \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} &= f(y_n, z_n, t_n) \\ 0 &= g(y_n, z_n, t_n). \end{aligned}$$

Auflösung der zweiten Gleichung nach z_n liefert

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} = f(y_n, h(y_n,t_n), t_n).$$

Damit liegt aber eine bereits bekannte Situation vor.

Zur Integration von DAE's sind sehr frühzeitig (Gear 1971) die BDF-Formeln vorgeschlagen worden. Die BDF-Formeln haben die Gestalt

$$y'_n = [\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n-i}]/h, \qquad k = 1,2, \dots ,6.$$

Dabei entspricht z.B. die BDF1-Formel dem impliziten Euler-Verfahren

$$y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$

und die BDF2-Formel hat die Gestalt

$$y'_n = \frac{(3/2)y_n - 2y_{n-1} + (1/2)y_{n-2}}{h}.$$

Für Index 1 Probleme aus der Netzwerksimulation haben sich eine Kombination der BDF2 und der Trapezregel

$$y'_n = \frac{2(y_n - y_{n-1})}{h} - y'_{n-1}$$

als besonders erfolgreich herausgestellt.

Die Integration von DAE's

$$F(y', y, t) = 0$$

mit einem allgemeinen impliziten Mehrschrittverfahren (MSV)

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n-i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i y'_{n-i}, \qquad \beta_0 = 1$$

erfolgt durch Auflösung des Mehrschrittverfahrens nach y'_n und einsetzen in die DAE:

$$F(\frac{\alpha_0}{h} y_n + r_n, y_n, t_n) = 0.$$

Das (nichtlineare) Gleichungssystem wird dann mit dem Newton-Verfahren gelöst. Die zugehörige Jacobi-Matrix hat die Gestalt

$$J = \frac{\alpha_0}{h} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Für lineare DAE's ergibt sich

$$J = \frac{\alpha_0}{h} A + B$$

und die Regularität der Matrixschar (A,B) sichert die Regularität der Jacobi-Matrix bis auf endlich viele h.

Beispiel
Gegeben sei die Index 2 Aufgabe

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $x_1(t) = h_1(t)$ und $x_2(t) = h_2(t)\text{-}\,h_1'(t)$.
Eine Diskretisierung mit einem MSV führt zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} &x_{1n} = h_{1n}\,, \\ &x_{1n}' = (1/h)[\sum_{i=0}^{k}\alpha_i h_{1(n-i)} - h\sum_{i=1}^{k}\beta_i x_{1(n-i)}'\,]\,, \\ &x_{2n} = h_{2n}\text{-}\,x_{1n}'\,. \end{aligned}$$

Eine grobe Stabilitätsuntersuchung zeigt:
Das Verhalten der Näherungslösung hängt im Wesentlichen von x_{1n}' ab. Bei einem konsistenten und stabilen Mehrschrittverfahren approximiert der Ausdruck

$$(1/h)\sum_{i=0}^{k}\alpha_i h_{1(n-i)}$$

x_{1n}' in stabiler Weise. D.h. der Ausdruck

$$\sum_{i=0}^{k}\beta_i x_{1(n-i)}'$$

sollte sich mit zunehmenden n auslöschen. Dieses ist dann gewährleistet, wenn die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\sum_{i=0}^{k}\beta_i \varsigma^{k-i} = 0$$

alle dem Betrage nach kleiner als 1 sind. Diese Eigenschaft hat die Trapezregel nicht, jedoch die BDF-Formeln.

§ 7.6 Differenzenverfahren für Algebro-Differentialgleichungen

Es sollen noch zwei Sätze zur numerischen Behandlung von Algebro-Differentialgleichungen angegeben werden.
Gegeben sei die Aufgabe

$$\begin{aligned} y' &= f(y,z) \qquad & f: R^n x R^m &\to R^n \\ \varepsilon z' &= g(y,z) \qquad & g: R^n x R^m &\to R^m \end{aligned}$$

Ein MSV für dieses System von Differentialgleichungen liefert

$$\begin{aligned} \alpha_k y_{n+k} + \cdots + \alpha_0 y_n &= h(\beta_k f_{n+k} + \cdots + \beta_0 f_n) \\ \varepsilon(\alpha_k z_{n+k} + \cdots \ \alpha_0 z_n) &= h(\beta_k g_{n+k} + \cdots + \beta_0 g_n) \end{aligned}$$

oder mit $\varepsilon = 0$ (ε-Einbettung)

$$\begin{aligned} \alpha_k y_{n+k} + \cdots + \alpha_0 y_n &= h(\beta_k f_{n+k} + \cdots + \beta_0 f_n) \\ 0 &= h(\beta_k g_{n+k} + \cdots + \beta_0 g_n) \end{aligned}$$

Betrachte jetzt dazu die Index 1 Aufgabe

$$\begin{aligned} y' &= f(y,z) \\ 0 &= g(y,z) \end{aligned}$$

mit invertierbarem $g_z(y,z)$.

Satz
Gegeben sei die obige Aufgabe vom Index 1 und ein zugehöriges (ε-Einbettung) MSV. Das MSV sei konsistent und stabil, d.h.

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i = \sum_{i=0}^{k} \beta_i$$

die Wurzeln des Polynoms $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \xi^i$ seien vom Betrag kleiner oder gleich Eins und die Wurzeln mit dem Betrag 1 einfach.
Das Verfahren sei von der Ordnung p und der Fehler im Startfeld y_j, z_j, $j = 0,1, \ldots ,k-1$ sei $O(h^p)$.
Sind die Wurzeln des Polynoms $\sum_{i=0}^{k} \beta_i \xi^i$ vom Betrag kleiner oder gleich Eins und die Wurzeln mit dem Betrag 1 einfach, dann gilt für den globalen Fehler

$$y_n - y(t_n) = O(h^p) \quad \text{und} \quad z_n - z(t_n) = O(h^p)$$

für alle $t_n - t_0 = nh \leq T$.

Bemerkung
Ist das System von Algebro-Differentialgleichungen zusätzlich steif, dann sollten MSV benutzt werden die zusätzlich L-stabil sind.

Gegeben seien jetzt die Aufgabe mit dem Index 2

$$\begin{aligned} y' &= f(y,z) \\ 0 &= g(y,z), \end{aligned}$$

(d.h. $g_y(y)f_z(y,z)$ invertierbar) und ein zugehöriges MSV (ε-Einbettung)

$$\begin{aligned} \alpha_k y_{n+k} + \cdots + \alpha_0 y_n &= h(\beta_k f_{n+k} + \cdots + \beta_0 f_n) \\ 0 &= h(\beta_k g_{n+k} + \cdots + \beta_0 g_n) \end{aligned}.$$

Bemerkung
Bereits im §7.5 wurde darauf hingewiesen, dass in diesem Fall Vertstärkungen in den Voraussetzungen für das Polynom $\sum_{i=0}^{k} \beta_i \xi^i$ angebracht sind.

Satz
Gegeben sei die obige Aufgabe vom Index 2 und ein zugehöriges (ε-Einbettung) MSV.
Das MSV sei konsistent und stabil, d.h.

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i = \sum_{i=0}^{k} \beta_i$$

und die Wurzeln des Polynoms $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \xi^i$ vom Betrag kleiner oder gleich Eins und die Wurzeln mit dem Betrag 1 einfach.
Das Verfahren sei außerdem von der Ordnung ≥ 2, der Fehler im Startfeld y_j, $j = 0,1, \ldots ,k-1$ sei $O(h^{p+1})$ und der Fehler im Startfeld z_j, $j = 0,1, \ldots ,k-1$ sei $O(h^p)$.
Sind die Wurzeln des Polynoms $\sum_{i=0}^{k} \beta_i \xi^i$ vom Betrag kleiner als Eins, dann gilt für den globalen Fehler

$$y_n - y(t_n) = O(h^{p+1}) \quad \text{und} \quad z_n - z(t_n) = O(h^p)$$

für alle $t_n - t_0 = nh \leq T$.

Literatur
K.E. Brenau, S.L. Campbell, L.R. Petzold
Numerical Solution of Intial-Value-Ptroblems in Differential-Algebraic-Equations (1989)
E. Hairer, G. Wanner
Solving Ordinary Differential Equations II. Springer Series in Computational Mathematics 14 (1991)