Übungen zu Numerische Mathematik
SS06
B. von Loesch, K. Taubert

Abgabe: 27.6.06 vor den Übungen

Aufgabe 37
Jene die Aufgabe 37 noch nicht behandelt haben, haben jetzt die Gelegenheit dieses nach zu holen.

Aufgabe 38
Zeige: Für die Quadraturformel

$$Q_2(f) = (3/4)f(1/3)+(1/4)f(1)$$

und $f \in C^3[0,1]$ gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - Q_2(f) \right| \leq \operatorname*{Max}_{\xi\in[0,1]} \frac{|f^{(3)}(\xi)|}{216}.$$

Tipp: Q_2 kann als interpolatorische Quadraturformel mit einem geeigneten Polynom ersten Grades interpretiert werden. Nutze nun aus, dass auch Polynome höheren Grades exakt integriert werden und führe einen geeigneten Grenzübergang durch!

Aufgabe 39
Beweisen Sie die in der Vorlesung angegebene Fehlerabschätzung für die zusammengesetzte Simpson-Regel.

Aufgabe 40
Führen Sie das Romberg-Verfahren für die Integrale

$$\frac{5}{2}\int_0^1 \sqrt{x^3}\,dx \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2}\int_0^1 \cos(\frac{\pi}{2}x)dx$$

durch und beobachten Sie das unterschiedliche Konvergenzverhalten. Woran liegt es?

Aufgabe 41
Gegeben sei der Integralsinus

$$\mathrm{Si}(1) = \int_0^1 (\sin(t)/t)dt.$$

Berechnen Sie eine Näherung mit der Simpsonregel und schätzen Sie den absoluten Fehler ab.
Tipp: Der Integrand ist beliebig oft differenzierbar. Für die benötigte Abschätzung verwende man eine Taylorentwicklung.