Übungen zu Numerische Mathematik
SS06
K. Taubert

Abgabe: 25.4.06 vor den Übungen

Aufgabe 10
Es sei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$ und es sei

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Zeige:

1) Zu jedem Paar $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ existiert ein $\xi \in \mathbf{R}$ mit der Eigenschaft

$$F(x) - F(y) = \frac{f(\xi)f''(\xi)}{(f'(\xi))^2}(x-y).$$

2) Ist $K = \sup_{\xi \in R} \left| \frac{f(\xi)f''(\xi)}{(f'(\xi))^2} \right| < 1$, dann ist für jedes $x^0 \in \mathbf{R}$ die (Newton-) Folge (x^k) mit

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}, \quad k = 0,1,2, \ldots$$

eine Cauchy-Folge.

3) Ist $K<1$, dann ist der Grenzwert x^* der (Newton-) Folgen (x^k) unabhängig von x^0.

4) Bestimmen Sie mit dem Newton Verfahren den Wert von $\sqrt{2}$ auf sechs Stellen hinter dem Komma. Betrachte Sie dafür $\sqrt{2}$ als Nullstelle von x^2-2. Ist die Bedingung $0 \le K < 1$ erfüllt?

5) Geben Sie eine nichtlineare Funktion $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $0 \le K < 1$ an.

Aufgabe 11
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \cos(x)\cosh(x)+1.$$

Konstruieren Sie ein Polynom $p_8(.)$ achten Grades mit folgenden Eigenschaften:

$$p_8^{(i)}(0) = f^{(i)}(0) \qquad i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8.$$

Plotten Sie die Differenz $f(x) - p_8(x)$ im Intervall $[-0.5, 0.5]$ und $[-\pi/2, \pi/2]$.

Aufgabe 12
Die Legendre-Polynome können mit $L_0(x) = 1$, $L_1(x)=x$ durch die Rekursionsformel

$$L_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1}\, x\, L_k(x) - \frac{k}{k+1} L_{k-1}(x) \qquad k=1,2,3,\ldots\ldots$$

definiert werden. Bestimme exakt die fünf reellen Nullstellen von $L_5(x)$.
Die Nullstelle in der Umgebung von 0.90 soll mit der Bisektionsmethode approximiert werden. Wähle a = 0.6 und b = 1. Der Fehler soll kleiner als 10^{-10} werden.
Zeichnen Sie den Fehler in Abhängigkeit von der Anzahl der Intervallhalbierungen.
Dieselbe Nullstelle soll nun mit den Newton Verfahren bestimmt werden. Wähle $x^0 = 1$. Der Fehler soll kleiner als 10^{-10} werden. Zeichnen Sie den Fehler in Abhängigkeit von der Anzahl der Newton Schritte und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem der Bisektionsmethode.