# Übungen zu Numerische Mathematik II
# WS06/07
## J. Sternberg, K. Taubert

**Abgabe: 23.1.07 vor den Übungen**

**Aufgabe 35**
Die Simulation eines Nand-Gatters in der (fossilen) DTL-Technologie mit dem Ebers-Moll Modell und einer Versorgungsspannung von 24 Volt führt auf die Gleichungen

$$f_1(x_1,x_2,x_3,e_1,e_2) = 0$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3,e_1,e_2) = 0$$
$$f_3(x_1,x_2,x_3,e_1,e_2) = 0$$

mit den Eingangsspannungen $0 \le e_1,e_2 \le 12$ in Volt, der Ausgangsspannung $0 \le x_3 \le 12$ und den internen Spannungen $x_1,x_2$. Dabei ist

$$f_1 = (12-x_1)/R_0+(x_2-x_1)/R_1-f_D(x_1-e_1)-f_D(x_1-e_2)$$
$$f_2 = -(x_2-x_1)/R_1+(-12-x_2)/R_2-((1-\alpha_F)/\alpha_F)f_D(x_2-0)-((1-\alpha_R)/\alpha_R)f_D(x_2-x_3)$$
$$f_3 = (12-x_3)/R_C- f_D(x_2-0) +f_D(x_2-x_3)/\alpha_R$$

.
und $f_D(\varphi_2-\varphi_1) = I_S((\exp(\varphi_2-\varphi_1)/U_T)-1)$.
Die noch nicht festgelegten Parameter haben die Werte $R_0 = 1000\ \Omega$, $R_C = 1000\,\Omega$, $R_1 = 18000\,\Omega$, $R_2 = 200000\,\Omega$, Is = 10^(-12) A und $U_T = 1/40$ V, $\alpha_R = 0.5$ und $\alpha_F=0.99$.

Mit den Eingangsspannungen $0 \le e_1 = e_2 \le 12$ (in Volt) entsteht ein Inverter. Für alle $0 \le e_1 = e_2 \le 12$ soll die zugehörige Ausgangsspannung $0 \le x_3 \le 12$ ermittelt werden.
Berechnen Sie, ausgehend von der aus Aufgabe 34 bekannten Lösung für $e_1 = e_2 = 0$, die weiteren Lösungen für $0 \le e_1 = e_2 \le 12$ mit Hilfe der klassischen Fortsetzungsmethode.
Zeichnen Sie die Komponente $x_3$ der Lösungen in Abhängigkeit von $e_1$ auf. Geben Sie gleichzeitig die Determinante und die Kondition der Funktionalmatrix an der Lösung in Abhängigkeit von $e_1$ an.
Berechnen Sie die Lösung mit der tangentialen Fortsetzungsmethode und vergleichen Sie den Aufwand.

**Erhebliche Sonderpunkte gibt es für jene, die eine Zeichnung der Lösungskomponente $x_3(e1,e2)$ für $0 \le e_1, e_2 \le 12$ anfertigen.**

**Aufgabe 36**
Gegeben sei die Fixpunktaufgabe

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 0.1x_1^2+0.1x_2^2+0.1x_3^2 \\ 0.1x_1+0.1x_2+0.1x_3 \\ 0.1x_1x_2x_3+0.3 \end{pmatrix}.$$

Zeige: Die Fixpunktaufgabe besitzt in D = [0,1]x[0,1]x[0,2] genau eine Lösung x*.
Bestimmen Sie numerisch eine Näherungslösung $x_n$ und geben Sie mit den Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen eine Abschätzung für die Differenz $x_n - x^*$ an.

**Aufgabe 37**

Gegeben sei eine Funktion

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

mit der Eigenschaft

$$| f(x) - f(y) | < | x - y | \quad \text{für alle } x,y \in \mathbf{R} \text{ mit } x \neq y.$$

Zeige:

1) Die Fixpunktaufgabe $f(x) = x$ besitzt nicht notwendig eine Lösung.
2) Besitzt die Fixpunktaufgabe $f(x) = x$ eine Lösung, dann ist diese eindeutig bestimmt.
3) Besitzt die Fixpunktaufgabe $f(x) = x$ eine Lösung, dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in N}$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für beliebiges $x_0 \in \mathbf{R}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt von f.