Übungen zu Numerische Mathematik II
WS06/07
J. Sternberg, K. Taubert

Abgabe: 19.12.06 vor den Übungen

Aufgabe 25
Gegeben sei die Menge C[-1,1] der stetigen und reellwertigen Funktionen auf [-1,1] mit dem inneren Produkt

$$(f,g) = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx\,.$$

Finde mit dem Verfahren von Erhard-Schmidt zu der Menge $\{ 1 , x , x^2 , x^3 \}$ aus C[a,b] ein zugehöriges System von orthonormalen Funktionen.

Aufgabe 26
Zeige:
1. Die Polynome

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

bilden für n = 0,1,2,3, …. bezüglich dem inneren Produkt

$$(f,g) = \int_{0}^{1} f(x)g(x)dx$$

ein Orthogonalsystem.

2. Die Koeffizienten c_k, k = 0,1,2,3,4 für die beste Approximation

$$v^*(x) = c_0 + c_1L_1(x) + c_2L_2(x) + c_3L_3(x) + c_4L_4(x)$$

von e^x sind gegeben durch

$$c_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{+1} e^x L_k(x)dx\,.$$

3. Die Integrale

$$I_n = \int_{-1}^{1} x^n e^x dx$$

führen auf eine Rekursionsformel

$$I_n = a(n) - nI_{n-1} \qquad n \geq 1$$

mit einem geeigneten a(n). Welches numerische Problem ergibt diese Rekursionsformel für große n?
4. Geben Sie die Entwicklungskoeffizienten c_i, i = 0,1,2,3,4 an und plotten Sie die Differenz

$$e^x - v^*(x).$$

Aufgabe 27
Die Funktion $f(x) = x^2$ soll auf dem Intervall [0,1] durch ein Element der (nichtlinearen)

Menge

$$V = \{ a_1\cos(a_2x)+b_1\sin(b_2x) \mid a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathbf{R} \}$$

möglichst gut approximiert werden. Gibt es bezüglich der Maximum-Norm eine beste Approximation für f in V?
Tipp: Betrachte die Funktionen aus V der Gestalt

$$(1/c^2)(1-\cos(cx)), \qquad c \in \mathbf{R}.$$

Aufgabe 28
Zeige:
1. Die Funktionen

$$\{ 1 , \cos(x), \sin(x), \ldots\ldots , \cos(nx), \sin(nx) \}$$

   mit $x \in [0,2\pi)$, $n \in N$, bilden ein Haarsches System.
2. Die Funktionen

$$\{ 1 , \cos(x), \ldots\ldots , \cos(nx) \}$$

   mit $x \in [0,\pi)$, $n \in N$, bilden ein Haarsches System.