Übungen zu Numerische Mathematik II
WS06/07
J. Sternberg, K. Taubert

Abgabe: 5.12.06 vor den Übungen

Aufgabe 18
Schreiben Sie ein rekursives Programm zur Durchführung der FFT. Testen Sie Ihr Programm!

Aufgabe 19
Die trigonometrische Interpolationsaufgabe

$$\tau = a + b\cos x + c\sin x + d\cos 2x$$

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad x_j = \frac{2\pi}{4} j, \qquad j=0,1,2,..,3$$

besitzt für beliebiges τ eine eindeutig bestimmte Lösung.
Die trigonometrische Interpolationsaufgabe

$$\tau = a + b\cos x + c\sin x + d\sin 2x$$

mit τ und x wie oben besitzt entweder keine oder unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 20
Es sei

$$D_n = \operatorname{span}\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\ldots, \cos nx, \sin nx\}, \quad n=1,2,3, \ldots.$$

und $x = (x_0, x_1, \ldots.., x_{N-1})^T$, $x_j = \frac{2\pi}{N} j$, $j=0,1,2,..,N-1$, $\quad N \geq 2n+1$.
Zeige: die erzeugenden Funktionen von D_n bilden bezüglich dem inneren Produkt

$$(u,v) = \sum_{j=0}^{N-1} u_j v_j$$

eine Orthonormalbasis.

Tipp: Beachten Sie die Relationen

$$\sum_{j=0}^{N-1} \cos(kx_j) = \{ \begin{matrix} 0 & \text{für} & k/N \notin Z \\ N & \text{für} & k/N \in Z \end{matrix} \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=0}^{N-1} \sin(kx_j) = 0 \ \text{ für alle } \ k \in Z.$$

Aufgabe 21
Es sei N =2n mit $n \in N$. Bestimmen Sie die Koeffizienten der besten Approximationen

$$g_m(x) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{j=1}^{m} (a_j' \cos(jx) + b_j' \sin(jx)) \quad m<n$$

für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x \le \pi \\ 2\pi - x & \text{für} \quad \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$

für alle m<n =16 und zwar im Sinne der diskreten 2-Norm $\sum_{j=0}^{N-1} (g_m(x_j) - f(x_j))^2$.

Dabei sei wieder $x_j = \frac{2\pi}{N} j$, j=0,1,2,.. ,N-1.