Übungen zu Numerische Mathematik II
WS06/07
J. Sternberg, K. Taubert

Abgabe: 14.11.06 vor den Übungen

Aufgabe 7
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \qquad a \in R$$

Gebe die Menge M jener $a \in R$ an, für welche die Matrix A symmetrisch und positiv definit ist.
Tipp: Eine reelle und symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn die Determinanten aller Hauptminoren positiv sind.
Zeige:
a) Notwendig und hinreichend für die Konvergenz des GSV bzw. ESV ist, dass die Eigenwerte der zugehörigen Iterationsmatrizen dem Betrage nach kleiner als Eins sind.
b) Das GSV ist nicht für alle $a \in M$ konvergent.
c) Das ESV ist für alle $a \in M$ konvergent.

Aufgabe 8
Es sei A eine reelle, symmetrische und positiv definite n*n Matrix. Beweisen Sie, dass das zum Gleichungssystem Ax = b gehörige SOR-Verfahren für alle $0 < \omega < 2$ konvergent ist.
Tipp: L. Collatz. Funktionalanalysis und Numerische Mathematik.

Aufgabe 9
Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem der Gestalt

$$\begin{pmatrix} A^1 & 0 \\ R^2 & A^2 \end{pmatrix} x = b \qquad \text{oder} \qquad Ax = b$$

mit n*n Matrizen R^2 und A^i, $i = 1,2$, $(n > 1)$.
Die Matrizen A^i seien irreduzibel und mögen außerdem das schwache Zeilensummen-kriterium erfüllen. Es sei $A^2 = (a^2_{jk})$ und entsprechend

$$R^2 = (r_{jk}) \qquad \text{mit} \qquad r_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{für } j \geq k \\ a^2_{jk} & \text{für } j < k. \end{cases}$$

Zeige:
a) Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar für jedes $b \in R^{n+n}$
b) Das ESV ist konvergent
c) Zeige mit den zugehörigen orientierten Graphen, dass die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad |a| \geq 2$$

nicht irreduzibel ist.

d) Das ESV für das Gleichungssystem $Bx = b$ ist konvergent.

Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass für ein Gleichungssystem mit einer irreduziblen und schwach diagonaldominanten Matrix das ESV konvergent ist.