Übungen zu Numerische Mathematik II
WS06/07
J. Sternberg, K. Taubert

Abgabe: 6.11.06 vor den Übungen

Die Parallelübung von 8.30-10.00 von Frau Sternberg findet im Raum 432 statt

Aufgabe 4
Gegeben seien die 4 linearen Gleichungssysteme der Form $A_i x = b_i$, $i = 1,2,3,4$, wobei b_i immer so gewählt wurde, dass der Einheitsvektor $e_1 = (1,0,0)$ die Lösung des Systems ist, und die Matrizen A_i durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix},$$

gegeben sind.
Für welche Gleichungssysteme ist das Jacobi bzw. Gauß-Seidel Verfahren konvergent ?
Für die Gleichungssysteme, bei denen sowohl das Gauss-Seidel als auch das Jacobi Verfahren konvergent sind, verifizieren Sie auch numerisch (Startvektor $x^0 = (1,1,1)^T$) welches der Verfahren günstiger ist und geben Sie die Anzahl der Schritte an um eine Genauigkeit von 10^{-4} zu erzielen.

Aufgabe 5
Gegeben seien die Matrizen

$$A1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und ein zugehöriges Gleichungssystem

$$Ax = \begin{pmatrix} A1 & A2 & A3 & A3 & A3 \\ A2 & A1 & A2 & A3 & A3 \\ A3 & A2 & A1 & A2 & A3 \\ A3 & A3 & A2 & A1 & A2 \\ A3 & A3 & A3 & A2 & A1 \end{pmatrix} x = b$$

Der Vektor b sei das Ergebnis der Anwendung von A auf den Vektor $x = (1,1,1, ...,1,1)^T$.
Bestimmen Sie, mit dem Einheitsvektor als Startvektor, durch das GSV, ESV und den SOR-Verfahren mit verschiedenen Relaxationsfaktoren ω, eine Näherungslösung mit einem Fehler der kleiner als 10^{-6} ist. Geben Sie die Anzahl der dafür notwendigen Schritte an und finden Sie einen möglichst günstigen Relaxationsfaktor.

Aufgabe 6

Das Gleichungssystem mit 100 Unbekannten der Form (a = 0.5)

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 2 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2+a \\ 2+2a \\ \vdots \\ 2+2a \\ 2+a \end{pmatrix}$$

soll mit dem Richardson-Verfahren und dem Startwert $x^0 = (1,0,0,.......,0)^T$ gelöst werden.
Führen Sie jeweils 100 Iterationen mit den Parametern α = 0.001, 0.01, 0,1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6 und 0.65 durch.
Geben Sie den Abstand zwischen der nach 100 Iterationen erzielten Näherungslösung und der exakten Lösung des Gleichungssystems in der Maximum-Norm an.
Wie kann die unterschiedliche Güte der Näherungslösungen in Abhängigkeit von α erklärt werden?
Wiederholen Sie alles jedoch jetzt mit a = 1.