Prof. Dr. J. Struckmeier WS 2009/10

# Übungen zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen"

Blatt 9

Abgabetermin: 05.01.2010

**Aufgabe 30** Lösen Sie das Problem

$$\begin{aligned} u_t + (e^u)_x &= 0 && \text{in } x > 0, t > 0 \\ u(x,0) &= 2 && \text{für } x > 0 \\ u(0,t) &= a > 0 && \text{für } t > 0 \end{aligned}$$

Inwiefern gibt es einen Unterschied zwischen $a > 2$ und $a < 2$?

**Aufgabe 31** Zeigen Sie, dass $u(x,t) = u_0(x+t)$ mit $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ eine Integrallösung von

$$\begin{aligned} u_t - u_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

ist.

**Aufgabe 32** Konstruieren Sie die eindeutige Entropielösung von

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

und verifizieren Sie das Langzeitverhalten nach Satz 3.33 und 3.34 aus der Vorlesung.

**Aufgabe 33** Berechnen Sie die eindeutige Entropielösung der Burgers–Gleichung mit Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < -1 \\ 0 & -1 < x < 0 \\ 2 & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Stellen Sie das Verhalten der Lösung für $t > 0$ graphisch dar.