Prof. Dr. J. Struckmeier WS 2009/10

Übungen zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“
Blatt 5
Abgabetermin: 24.11.2009

Aufgabe 15 Die Funktion u sei glatt und eine Lösung von $u_t = \Delta u$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Beweisen Sie, dass dann $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung ist. Zeigen Sie weiter, dass auch die Funktion

$$v(x,t) := x \cdot Du(x,t) + 2tu_t(x,t)$$

die Wärmeleitungsgleichung löst.

Aufgabe 16 Zeigen Sie, dass für $n = 1$ die Lösungen von $u_t = u_{xx}$ mit der speziellen Form $u(x,t) = v(x^2/t)$ durch

$$v(z) = c \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + d$$

mit c und d als Konstanten gegeben sind.

Aufgabe 17 Geben Sie eine explizite Lösungsformel für das Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 18 Lösen Sie für $n = 2$ das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u \quad \text{in } (0,\pi)^2 \times (0,\infty) \\ u(0,y,t) &= u(\pi,y,t) = 1 \quad \text{auf } (0,\pi) \times [0,\infty) \\ u(x,0,t) &= u(x,\pi,t) = 1 \quad \text{auf } (0,\pi) \times [0,\infty) \\ u(x,y,0) &= 1 + \sin x(\cos x + \frac{1}{2}) \sin y \quad \text{auf } (0,\pi)^2 \times \{t=0\} \end{aligned}$$

Was macht die Lösung für $t \to \infty$?