Prof. Dr. J. Struckmeier WS 2009/10

Übungen zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“

Blatt 4

Abgabetermin: 17.11.2009

Aufgabe 12 Bestimmen Sie für $n = 2$ die Greensche Funktion der Laplacegleichung auf dem Quadranten $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Wie explizit können Sie damit die Lösung des entsprechenden Dirichlet–Problems für die Laplacegleichung angeben?

Aufgabe 13 Die Funktion u sei positiv und harmonisch in $B^0(0, r)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson Formel aus der Vorlesung folgende explizite Form der Harnackschen Ungleichung

$$r^{n-2} \frac{r - |x|}{(r + |x|)^{n-1}} \, u(0) \leq u(x) \leq r^{n-2} \frac{r + |x|}{(r - |x|)^{n-1}} \, u(0)$$

Aufgabe 14 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge. Eine Funktion $v \in \mathcal{C}(\bar{U})$ nennt man *subharmonisch*, falls gilt:

$$-\Delta v \leq 0 \quad \text{in } U$$

Zeigen Sie für subharmonische Funktionen zunächst die folgende Mittelwerteigenschaft:

$$v(x) \leq ⨍_{B(x,r)} v \, dy$$

für alle Kugel $B(x, r) \subset U$. Schließen Sie daraus, dass eine subharmonische Funktion das schwache Maximumprinzip erfüllt.