

Übungen zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“

Blatt 3

Abgabetermin: 10.11.2009

Aufgabe 9 Betrachten Sie folgendes Dirchlet–Problem für die zweidimensionale Laplacegleichung in der oberen Halbebene

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & -\infty < x < \infty; 0 < y < \infty \\ u(x, 0) = f(x) & f \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty \\ u(x, \infty) = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Fouriertransformation bezüglich x , dass sich die Lösung in der Form

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}$$

darstellen lässt.

Aufgabe 10 Zeigen Sie, dass das äußere Problem für die Laplacegleichung in $n \geq 2$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{für } |x| > R \\ u = \text{const} & \text{für } |x| = R \end{cases}$$

unendlich viele Lösungen besitzt. Welche zusätzlichen Bedingungen an das Verhalten der Lösung im Unendlichen liefern die Eindeutigkeit der Lösung. Welche Rolle spielt dabei die Dimension des Problems?

Aufgabe 11 Für $n \geq 3$ sei u die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B^0(0, r) \\ u = g & \text{auf } \partial B(0, r) \end{cases}$$

Beweisen Sie die folgende Mittelwertformel:

$$u(0) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(0,r)} g dS + \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{B(0,r)} \left(\frac{1}{|y|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) f dy$$