Prof. Dr. J. Struckmeier WS 2009/10

Übungen zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen"
Blatt 10
Präsenzübung am 15. Januar 2010

Aufgabe 34 Bestimmen Sie, welches der folgenden Systeme (strikt) hyperbolisch ist und berechnen Sie die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems $u_t = M u_x$, $u(x,0) = u_0(x)$

1)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad u_0(x) = (\sin x, \cos x)^t$$

2)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad u_0(x) = (1, \sin x, \cos x)^t$$

3)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_0(x) = (\sin x, \cos x)^t$$

Aufgabe 35 Leiten Sie die Formel von d'Alembert für die eindimensionale Wellengleichung durch Lösung des zugehörigen Systems ab. Transformieren Sie die zweidimensionale Wellengleichung $w_{tt} = w_{xx} + w_{yy}$ auf ein System und zeigen Sie, dass das System (strikt) hyperbolisch ist. Diskutieren Sie dann die Lösung für ein gegebenes Anfansgwertproblem.

Aufgabe 36 Eine wichtige Gleichung in der transonischen Aerodynamik ist die sogenannte Tricomi–Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Schreiben Sie die Gleichung als ein System erster Ordnung und zeigen Sie, dass die Gleichung nur für $x < 0$ hyperbolisch ist. Berechnen Sie die charakteristischen Kurven und die zugehörigen Invarianten.

Aufgabe 37 Betrachten Sie das System $U_t = M(U) U_x$ mit $U(x,t) = (u(x,t), c(x,t))^t$, Matrix $M(U)$

$$M(U) = -\begin{pmatrix} u + c & 1 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

und den Anfangsbedingungen $u(x,0) = u_0(x)$, $c(x,0) = c_0(x)$.
Berechnen Sie die charakteristischen Kurven und die Riemann Invarianten. Ist es möglich, eine Lösung in Form einfacher Wellen (Simple Waves) zu bestimmen?