

Übungen zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“

Blatt 1

Abgabetermin: 27.10.2009

Aufgabe 1 Gegeben sei die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$au_x + bu_y = g(x, y), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad ab \neq 0$$

Transformieren Sie die Differentialgleichung durch

$$v = bx + ay, \quad w = bx - ay$$

in eine gewöhnliche Differentialgleichung und lösen Sie damit das Anfangswertproblem

$$u_t + 3u_x = 36t + 12x, \quad u(x, 0) = 0$$

Aufgabe 2 In der geometrischen Optik verwendet man die Eikonalgleichung

$$|Du| := \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{1/2} = 1$$

Klassifizieren Sie die Differentialgleichung nach der Definition 1.2 aus der Vorlesung und bestimmen Sie in Anlehnung an die geometrische Optik eine Lösung der Gleichung.

Aufgabe 3 Die Telegraphengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0$$

beschreibt den zeitlichen Verlauf der Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.Gesucht ist die Signalspannung, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0, t) = 3 \sin 2t$, $t \geq 0$ eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung für $x \rightarrow \infty$ beschränkt sein.

- Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ nicht zu einer Lösung führt.
- Man versuche den Lösungsansatz $u(x, t) = u_0 e^{-ax} \sin(2t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 Beweisen Sie das Transporttheorem mit Hilfe der Beweisidee aus der Vorlesung.