Prof. Dr. J. Struckmeier WS 2005/06

Übungen zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen"

Blatt 9

Abgabetermin: 16.01.2006

Aufgabe 33 Multiplizieren Sie die Burgers-Gleichung

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0$$

mit $2u$ und schreiben Sie die entstehende Gleichung wiederum als Erhaltungsgleichung mit neuer Flußfunktion. Betrachten Sie das Riemann Problem mit $u_l > u_r$. Diskutieren Sie die schwachen Lösungen, insbesondere die Schock-Geschwindigkeiten.

Aufgabe 34 Betrachten Sie die Verkehrsdichte ρ auf einer einspurigen, eindimensionalen Autobahn. Aus Erhaltungsgründen gilt

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0.$$

Benutzen Sie als plausibles Modell für den Verkehrsfluß die Annahme

$$u = u(\rho) = u_{max}(1 - \rho/\rho_{max}),$$

wobei u_{max} die Höchstgeschwindigkeit bei leerer Strasse und ρ_{max} die maximale Verkehrsdichte ist. Schreiben Sie damit die Gleichung in Erhaltungsform um. Betrachten Sie die Anfangsdaten

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_{max}/2 & x < 0 \\ \rho_{max} & x > 0 \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Trajektorien der Autos und die Charakteristiken.

Aufgabe 35 Bestimmen Sie, welches der folgenden Systeme (strikt) hyperbolisch ist und berechnen Sie die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems $u_t = Mu_x$, $u(x,0) = u_0(x)$

1)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad u_0(x) = (\sin x, \cos x)^t$$

2)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad u_0(x) = (1, \sin x, \cos x)^t$$

3)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_0(x) = (\sin x, \cos x)^t$$

Aufgabe 36 Leiten Sie die Formel von d'Alembert für die eindimensionale Wellengleichung durch Lösung des zugehörigen Systems ab. Transformieren Sie die zweidimensionale Wellengleichung $w_{tt} = w_{xx} + w_{yy}$ auf ein System und zeigen Sie, dass das System (strikt) hyperbolisch ist. Diskutieren Sie dann die Lösung für ein gegebenes Anfangswertproblem.