Übungen zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“
Blatt 7
Abgabetermin: 19.12.2005

Aufgabe 25 Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems $u_t + u_x = u$, $u(x,0) = x$ für $x > t$ positiv ist.

Aufgabe 26 Für $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ sei das Anfangswertproblem

$$u_t - xu_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die L^1–Norm der Lösung streng monoton fallend ist und erklären Sie dieses Phänomen anhand der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

Aufgabe 27 Berechnen Sie die Lösung des Problems

$$u_x + u_y = u^2$$

die durch die Kurve $u = x$ auf $y = -x$ läuft und zeigen Sie, dass die Lösung auf der Hyperbel $x^2 - y^2 = 4$ singulär wird.

Aufgabe 28 Lösen Sie für $x \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$u_t - \left(x - \int_{\mathbb{R}} y u(y,t) dy \right) u_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x)$$

unter der Annahme, dass u_0 eine (stückweise) stetige Funktion mit kompaktem Träger ist. Untersuchen Sie die Lösung mit der Anfangsbedingung aus Aufgabe 26.