Prof. Dr. J. Struckmeier WS 2005/06

Übungen zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen"

Blatt 6

Abgabetermin: 12.12.2005

Aufgabe 21 Seien $E = (E_1, E_2, E_3)$ und $B = (B_1, B_2, B_3)$ Lösungen der Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} E_t &= \mathrm{rot} B \\ B_t &= -\mathrm{rot} E \\ \mathrm{div} E &= \mathrm{div} B = 0 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt $u_{tt} - \Delta u = 0$ für $u = E_i$ oder B_i $(i = 1, 2, 3)$.

Aufgabe 22 Es sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

wobei die Anfangswerte einen kompakten Träger haben. Weiter sei $k(t) = \int_{\mathbb{R}} u_t^2 dx$ die kinetische und $p(t) = \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx$ die potentielle Energie. Zeigen Sie, dass $k(t) + p(t)$ konstant in t ist und $k(t) = p(t)$ für genügend großes t gilt.

Aufgabe 23 Sei u eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

wobei g und h glatt sind und einen kompakten Träger haben. Zeigen Sie, dass eine Konstante C existiert mit

$$|u(x, t)| \leq C/t \quad (x \in \mathbb{R}^3, t > 0)$$

Aufgabe 24 Lösen Sie mit der Charakteristikenmethode die Gleichungen

1) $xu_x + yu_y = 2u, \quad u(x, 1) = g(x)$

2) $uu_x + u_y = 1, \quad u(x, x) = x/2$

3) $xu_x + 2yu_y = 3u, \quad u(x, y, 0) = g(x, y)$