Prof. Dr. J. Struckmeier WS 2005/06

Übungen zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“

Blatt 5

Abgabetermin: 05.12.2005

Aufgabe 17 Sei $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = 0$ gegeben. Leiten Sie für die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = g & \text{auf } \{x = 0\} \times [0,\infty) \end{cases}$$

die Formel

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} g(s)ds$$

her.

Hinweis: Sei $v(x,t) = u(x,t) - g(t)$ und erweitern Sie v durch ungerade Reflektion auf $\{x < 0\}$.

Aufgabe 18 Die Funktion $v \in C_1^2(U_T)$ heißt *Sublösung* der Wärmeleitungsgleichung falls gilt

$$v_t - \Delta v \leq 0 \quad \text{in } U_T$$

Zeigen Sie:

a)

$$v(x,t) \leq \frac{1}{4r^n} \iint\limits_{E(x,t;r)} \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} v(y,s)dyds$$

b)

$$\max_{(x,t)\in\overline{U}_T} v(x) = \max_{(x,t)\in\Gamma_t} v(x)$$

c) Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt und konvex, u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung und $v := \Phi(u)$. Dann ist v eine Sublösung.

d) $v := |Du|^2 + u_t$ ist eine Sublösung, falls u die Wärmeleitungsgleichung löst.

Aufgabe 19 Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung von $u_{xy} = 0$ von der Form

$$u(x,y) = F(x) + G(y)$$

ist. Beweisen Sie dann mit Hilfe der Variablentransformation $\xi = x + t$ und $\mu = x - t$, dass $u_{tt} - u_{xx} = 0 \Leftrightarrow u_{\xi\eta} = 0$. Kombinieren Sie beide Resultate um die Formel von d'Alembert abzuleiten.

Aufgabe 20 Beweisen Sie Lemma 2.41 aus der Vorlesung.