# Übungen zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“

Blatt 4

Abgabetermin: 21.11.2005

**Aufgabe 13** Beweisen Sie die Harnacksche Ungleichung:
Für jede zusammenhängende offene Menge $V \subset\subset U$ existiert eine positive Konstante $C$, so dass

$$\sup_V u \le C \inf_V u$$

für alle nichtnegativen harmonischen Funktionen $u$ in $U$. Dabei bezeichnet $V \subset\subset U$ die Eigenschaft $V \subset \overline{V} \subset U$, wobei $\overline{V}$ kompakt ist.

**Aufgabe 14** Sei $u$ die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} &= -1 \quad |x| < 1,\ |y| < 1, \\ u(x,y) &= 0 \quad\ \ |x| = 1 \text{ oder } |y| = 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Funktion $v(x,y) = u(x,y) + \frac{1}{4}(x^2+y^2)$ eine obere und eine untere Schranke für $u(0,0)$. Bestimmen Sie für $n = 2$ die Greensche Funktion der Laplacegleichung auf dem Quadranten $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

**Aufgabe 15** Die Funktion $u$ sei glatt und eine Lösung von $u_t = \Delta u$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Beweisen Sie, dass dann $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung ist. Zeigen Sie weiter, dass auch die Funktion

$$v(x,t) := x \cdot Du(x,t) + 2tu_t(x,t)$$

die Wärmeleitungsgleichung löst.

**Aufgabe 16** Zeigen Sie, dass für $n = 1$ die Lösungen von $u_t = u_{xx}$ mit der speziellen Form $u(x,t) = v(x^2/t)$ durch

$$v(z) = c \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + d$$

mit $c$ und $d$ als Konstanten gegeben sind.