Prof. Dr. J. Struckmeier WS 2005/06

Übungen zur Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen“
Blatt 3
Abgabetermin: 14.11.2005

Aufgabe 9 Lösen Sie das folgende Dirichletsche Problem auf dem Kreis $r^2 = x^2 + y^2 \leq 4$.

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} &= 0 \text{ für } r < 2, \\ u(2,\phi) &= \cos^2(\phi) \text{mit } \phi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung auch in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 10 Betrachten Sie folgendes Dirchlet–Problem für die zweidimensionale Laplacegleichung in der oberen Halbebene

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & -\infty < x < \infty;\ 0 < y < \infty \\ u(x,0) = f(x) & f \to 0 \text{ für } |x| \to \infty \\ u(x,\infty) = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Fouriertransformation bezüglich x, dass sich die Lösung in der Form

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}$$

darstellen lässt.

Aufgabe 11 Zeigen Sie, dass das äußere Problem für die Laplacegleichung in $n \geq 2$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{für } |x| > R \\ u = const & \text{für } |x| = R \end{cases}$$

unendlich viele Lösungen besitzt. Welche zusätzlichen Bedingungen an das Verhalten der Lösung im Unendlichen liefern die Eindeutigkeit der Lösung? Welche Rolle spielt dabei die Dimension des Problems?

Aufgabe 12 Für $n \geq 3$ sei u die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B^0(0,r) \\ u = g & \text{auf } \partial B(0,r) \end{cases}$$

Modifizieren Sie den Beweis des Satzes 2.5 aus der Vorlesung um folgende Mittelwertformel zu beweisen

$$u(0) = \frac{1}{n\alpha(n) r^{n-1}} \int_{\partial B(0,r)} g dS + \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{B(0,r)} \left(\frac{1}{|y|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) f dy$$